# FUNDAMENTOS DE CÁLCULO INTEGRAL

R.J. Matus Q.
Martha L. Hernández
E. García G.
M. Franco E.

*Issac Newton*



Instituto Politécnico Nacional

# Fundamentos

# de

# Cálculo Integral

# Fundamentos

# de

# Cálculo Integral

**Lic. Martha Leticia Hernández ***
**UPIICSA – IPN, Academias de Matemáticas**

**Dra. Gilda Melva Franco Espejel ***
**UPIICSA – IPN, Academias de Matemáticas**

**Ing. Rodolfo Matus Quiroz ***
**UPIICSA – IPN, Academias de Matemáticas**

**Lic. Ernesto García García ***
**UPIICSA – IPN, Academias de Matemáticas**

*** Becario del Sistema de Becas por exclusividad, COFAA - IPN**
*** Participantes del Programa de Estímulo al Desempeño Docente – IPN**

Fundamentos de Cálculo Integral



ISBN 970-92240-4-2



PRIMERA EDICIÓN
500 Ejemplares

PRIMERA REIMPRESIÓN

IMPRESO EN MÉXICO

CAPTURISTAS:

JUAN CARLOS MEDINA VILLA
JUAN JOSÉ GUTIÉRREZ MENDOZA

# PRÓLOGO

Los grandes avances tecnológicos han facilitado las telecomunicaciones en todo el mundo, incrementando cada vez más los intercambios comerciales entre los países.

Con esta creciente globalización de mercados, las empresas deben ser más competitivas con sus productos y servicios. Para lograrlo, se requieren profesionistas cada vez mejor preparados que enfrenten el reto de la globalización.

Ante esta situación, las instituciones de educación superior del país, públicas y privadas, reestructuran y actualizan de manera permanente sus planes y programas de estudio para responder a esta demanda con nuevos perfiles profesionales.

En este contexto, el Instituto Politécnico Nacional (IPN), como institución pública rectora de la educación técnica en el país, hace esfuerzos para mantenerse a la vanguardia en la formación de técnicos y profesionistas de excelencia que necesita el sector público y privado.

Parte de este esfuerzo es la actualización y reestructuración de sus planes y programas de estudio en el marco del nuevo Modelo Educativo para que responda a las crecientes necesidades del desarrollo económico, político y social del país.

Como parte de estas actualizaciones, la matemática juega un papel relevante en prácticamente todas las licenciaturas por sus múltiples y variadas aplicaciones.

El aprendizaje y dominio de la matemática, en todos los niveles educativos, reviste especial importancia, ya que permite explicar y comprender los fenómenos naturales, tanto físicos como químicos, así como los económicos, administrativos y sociales. De aquí la necesidad y preocupación de las instituciones educativas como el IPN, a través de sus escuelas, centros y unidades, de contar con material didáctico que permita facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje de esta importante ciencia.

La Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA) del IPN, promueve entre su personal académico el diseño y elaboración de material didáctico que contribuya a la comprensión y dominio de todas las asignaturas, como la matemática, mediante proyectos de investigación educativos.

Esta obra es producto del proyecto de investigación "Material Didáctico para la Enseñanza del Cálculo Integral y la Estadística" con registro CGPI 20031888, dirigido a estudiantes de las carreras de ingeniería industrial e ingeniería en transporte, de acuerdo al contenido del programa de la asignatura del mismo nombre.

La literatura disponible en el mercado con este tema no se ajusta completamente al programa de estudio, ya que algunas obras son demasiado extensas al incluir otros temas innecesarios, o muy limitadas al omitir parte del contenido y alcance del curso, además de que los precios son elevados para un estudiante.

Con esta obra, se pretende, además de cubrir los objetivos del curso, ofrecerla a precios accesibles para los estudiantes.

Para su mejor comprensión, se presenta la teoría de manera abreviada, reforzándose con variados ejemplos ilustrativos y diversos ejercicios por resolver para que el estudiante evalúe su progreso en el dominio de los temas.

Por los alcances de la obra, se omite la demostración de los teoremas, ya que se le dio mayor énfasis a la aplicación de los mismos.

Su estructura y contenido se presenta de la siguiente manera:

En el Capítulo I, se define el concepto de sucesión y su aplicación en progresiones aritmética y geométrica; en los Capítulos II y III se define el concepto de serie y su aplicación en series de potencias; en el Capítulo IV, se define el concepto de integral indefinida como antiderivada o primitiva de una función con sus correspondientes fórmulas de integración inmediata, así como las principales técnicas de integración; en el Capítulo V, se define el concepto de integral definida y sus propiedades; en el Capítulo VI se muestran algunas de sus aplicaciones como el cálculo de áreas; en el Capítulo VII, se tratan los volúmenes de sólidos de revolución y sus principales propiedades ; en los Capítulos VIII y IX, se define el concepto de longitud de arco y el cálculo de áreas de volúmenes para sólidos de revolución; finalmente, en el Capítulo X se tratan funciones de varias variables y sus principales aplicaciones para dos variables independientes.

Se agradecerá al lector cualquier comentario u observación que contribuya al mejoramiento del contenido y alcances de la presente obra.

*Los Autores*

## *CONTENIDO*

# CAPÍTULO I

# SUCESIONES

## 1.1 DEFINICIÓN

Una sucesión es una función cuyo dominio está formado por todos los números enteros positivos, es decir, por los números naturales.

Las notaciones más comunes para representar a una sucesión son:

$$a_n \quad \{a_n\} \quad \{a_n\}_1^{\infty} \quad \{a_n\}_1^{4}$$

A los elementos que forman una sucesión se les denomina términos, siendo éstos: $a_1$, $a_2$, $a_3$,...$a_n$; en donde $a_n$ es el término general o enésimo de la sucesión.

Una sucesión puede ser finita, si está formada por un número finito de términos y su representación es $\{a_n\}_1^5$ o infinita, la cual está formada por un número infinito de términos en donde su representación es: $\{a_n\}_1^{\infty}$, $\{a_n\}$.

A una sucesión también se le conoce como progresión.

<u>*Ejemplos 1.1*</u>

1. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Al desarrollar sus términos tenemos:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$$

Lo cual nos indica una sucesión infinita; si queremos que esta sucesion sea finita, por ejemplo de cuatro términos, la representamos como:

$$\{a_n\}_1^4 = \left\{\frac{1}{n}\right\}_1^4 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$$

2. Encuentre los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

2.1 $\{a_n\}_1^5 = \{3n\} = \{3,6,9,12,15\}$

2.2 $\{a_n\}_1^5 = \left\{\frac{1}{3^n}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}\right\}$

2.3 $\{a_n\}_1^5 = \left\{\sqrt[3]{n^2+2n}\right\} = \left\{\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{35}\right\}$

2.4 $\{a_n\}_1^5 = \left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}\right\}$

2.5 $\{a_n\}_1^5 = \left\{\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n^2}\right\} = \left\{\frac{2}{1}, -\frac{4}{4}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{16}, \frac{32}{25}\right\}$

***Ejercicios 1.1***

Encontrar los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

1. $\{2n+4\}$
2. $\{x^{2n+1}\}$
3. $\left\{\frac{sen\, x}{n+1}\right\}$
4. $\{sen\, n\pi\}$
5. $\left\{\sqrt{\frac{x_n+1}{2x^2+n}}\right\}$
6. $\{n^n\}$
7. $\{1+(-1)^n\}$
8. $\left\{\frac{n}{(n+1)!}\right\}$
9. $\left\{\cos\frac{n}{\pi}\right\}$
10. $\left\{\frac{\ln(n+1)}{n}\right\}$

## *1.2 CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN*

Si al crecer el valor de $n$ la sucesión tiende a un número, se dice que la sucesión es convergente; en caso de que tienda a infinito (positivo fijo o negativo) se dice que la sucesión es divergente.

En forma general para analizar la convergencia o la divergencia de una sucesión, tomamos el límite de $a_n$ cuando n tiende a infinito, denotado por:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} c\,,\ c = cte\,,\ a_n \text{ converge} \\ \\ \infty\,,\ a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

*Ejemplos 1.2*

3. Analicemos la sucesión: $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$

**Solución:** Tomando su límite cuando "n" tiende a infinito

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \therefore \text{ converge}$$

4. Dada la sucesión $a_n=\left\{\frac{3n+1}{4n+2}\right\}$ analizar si converge o diverge.

**Solución:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+2}=\frac{\infty}{\infty} \text{ aplicando la regla de L'HOPITAL:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}=\frac{3}{4},\quad \therefore \text{converge}$$

5. Dada la sucesión $a_n=\left\{\frac{n^3+2n}{n^2+4}\right\}$ analizar si converge o diverge:

**Solución:**

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^2+4}=\frac{\infty}{\infty}$ utilizando la regla de L'HOPITAL:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{2}=\frac{\infty}{2}\to\infty \qquad \therefore \qquad \text{diverge.}$$

## Teoremas fundamentales para calcular límites

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ y $\lim_{n\to\infty}b_n=B$. Entonces:

**Teorema 1.2.1** $\lim_{n\to\infty}c=c$ ; c = cte

**Teorema 1.2.2** $\lim_{n\to\infty}c\,a_n=c\lim_{n\to\infty}a_n=cA$ ; c = cte

**Teorema 1.2.3** $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=\text{A}\pm\text{B}$

**Teorema 1.2.4** $\lim\limits_{n\to 00}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to 00} a_n \cdot \lim\limits_{n\to 00} b_n = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$

**Teorema 1.2.5** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} & \text{si} \quad \mathrm{A}\neq 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{B}\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \mathrm{A}=0 \quad \text{y} \quad \mathrm{B}\neq 0 \\ \text{no existe si} & \mathrm{A}\neq 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{B}=0 \\ \text{puede o no existir si} & \mathrm{A}=0 \quad \text{y} \quad \mathrm{B}=0 \end{cases}$

**Teorema 1.2.6** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,p} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p = A^p \quad ; \quad p\in\Re$

**Teorema 1.2.7** $\lim\limits_{n\to\infty} p^{an} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad p>1 \\ 1 & \text{si} \quad p=1 \\ 0 & \text{si} \quad p<1 \end{cases} \quad \mathrm{P}\in\Re$

**Teorema 1.2.8** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[a_n]{p} = 1 \quad ; \quad \text{si} \quad p>0$

**Teorema 1.2.9** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p^n}{n!} = 0 \quad ; \quad \text{si} \quad P\in\Re$

**Teorema 1.2.10** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

**Teorema 1.2.11** Si $a_n$ es una sucesión y si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

*La demostración de los teoremas queda fuera del alcance de esta obra.*

***Ejemplos***

Indique si las siguientes sucesiones convergen o divergen

6. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2+2n}{n+4}\right\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+2n}{n+4}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n+2}{1}\right\} = \infty \qquad \therefore \qquad \text{diverge.}$$

7. $\{a_n\} = \{2^n\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = 2^\infty \to \infty \quad \therefore \quad \text{diverge.}$$

8. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n^3 + 4n^2}{n+5}\right\}$

***Solución***:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 4n^2}{n+5}$ dividiendo entre la potencia máxima ( $n^3$ ) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3} + \frac{4n^2}{n^3}}{\frac{n}{n^3} + \frac{5}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{2+0}{0+0} = \frac{2}{0} \to \infty \quad \therefore \quad \text{diverge.}$$

**Nota:** cuando al tratar de obtener un límite, se presenta un cociente de infinito entre infinito, se puede resolver éste, aplicando la regla de L'HOPITAL o bien dividiendo tanto el numerador como el denominador entre la potencia máxima (como lo hicimos en el ejercicio anterior).

9. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{3n^2 + 2n}{n^4 + n}\right\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n}{n^4 + n} = \frac{\infty}{\infty}$$

aplicando la regla de L'HOPITAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n + 2}{4n^3 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{12n^2} = 0 \quad \therefore \quad \text{converge.}$$

10. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{e^{2n}}{n^4}\right\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{n^4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{2n}}{4n^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4e^{2n}}{12n^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8e^{2n}}{24n} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{16e^{2n}}{24} = \frac{\infty}{24} = \infty \qquad \therefore \qquad \text{diverge.}$$

11. $\{a_n\} = \{4^{2n+1}\}$

***Solución*:**

$$\lim_{n\to\infty} 4^{2n+1} = 4^{\infty} \to \infty \qquad \therefore \qquad \text{diverge.}$$

12. $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n^2}\right\}$

***Solución*:**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{c}{00} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \therefore \qquad \text{converge.}$$

13. $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{2n^2}{n^2+4}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

***Solución*:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+4}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+4}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2e$$

$\therefore$ converge.

14. $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{n^4+2n}{n+1}\right)^4\right\}$

***Solución*:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+2n}{n+1}\right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2}{1}\right)^4 = (\infty)^4 \qquad \therefore \qquad \text{diverge}$$

15. $\{a_n\}=\left\{\left(\dfrac{8+4\cdot 10^n}{5+2\cdot 10^n}\right)\right\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+4\cdot 10^n}{5+2\cdot 10^n}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8+4\cdot 10^n}{5+2\cdot 10^n}\cdot\frac{10^{-n}}{10^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot 10^{-n}+4}{5\cdot 10^{-n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8}{10^n}+4}{\frac{5}{10^n}+2}=\frac{0+4}{0+2}=2 \quad \therefore \quad \text{converge}$$

16. $\{a_n\}=\left\{\left(2-\dfrac{2}{n}\right)^2\right\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n}\right)^2=\left[\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right]^2=(2-0)^2=4 \qquad \therefore \qquad \text{converge.}$$

17. $\{a_n\}=\left\{\dfrac{8^n}{n!}\right\}$

***Solución***: Aplicando el teorema 1.2.9

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8^n}{n!}\right)=0 \qquad \therefore \qquad \text{converge.}$$

18. $\{a_n\}=\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(n\,sen\,\dfrac{\pi}{n}\right)\right\}$

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(n\,sen\,\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(n\,sen\,\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sen\,\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=1\cdot e\cdot\frac{0}{0}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi\cos\frac{\pi}{n}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=1\cdot e\cdot\pi=e\pi$$

$\therefore$ converge.

## *Ejercicios 1.2*

Determine cuáles de las siguientes sucesiones convergen y cuáles divergen

1. $\left\{\frac{n^4+2n+1}{n-5}\right\}$
2. $\left\{\frac{n+4}{n^6+2n}\right\}$
3. $\left\{\frac{n^5+2n^4}{n+1}\right\}$
4. $\left\{sen\ n\pi\right\}$
5. $\left\{\frac{n}{\ln n}\right\}$
6. $\left\{\frac{4^n}{2+4^n}\right\}$
7. $\left\{\frac{2^{2n}}{1+2^{2n}}\right\}$
8. $\left\{\frac{(2n)!}{n}\right\}$
9. $\left\{\frac{n^4}{n!}\right\}$
10. $\left\{(4n+5)^{1/n}\right\}$
11. $\left\{\frac{\ln(n)}{e^n}\right\}$
12. $\left\{\frac{e^n}{\ln n}\right\}$

Al realizar la suma, la resta o el producto entre dos sucesiones. $a_n$ y $b_n$ se pueden presentar los siguientes casos:

*Operaciones con sucesiones*

| Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ | y $\lim_{n\to\infty} b_n$ | Entonces | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ | $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ | $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ |
| $a$ | $\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ | $a>0$ $\infty$<br>$a<0$ $-\infty$ |
| $a$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ | $a>0$ $-\infty$<br>$a<0$ $\infty$ |
| $+\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | | $\infty$ |
| | $-\infty$ | | $\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $\infty$ | | $-\infty$ | $-\infty$ |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | | $\infty$ |

## 1.3 SUCESIONES MONÓTONAS

Para analizar si una sucesión es o no **monótona** se compara su término general $a_n$ con el inmediato posterior $a_{n+1}$, de la siguiente forma:

| Si para toda n | La sucesión se llama |
|---|---|
| $a_n \leq a_{n+1}$ | Creciente |
| $a_n < a_{n+1}$ | Estrictamente creciente |
| $a_n \geq a_{n+1}$ | Decreciente |
| $a_n > a_{n+1}$ | Estrictamente decreciente |
| $a_n = a_{n+1}$ | Constante |

Una sucesión que se comporta como alguna de las anteriores se dice que es **monótona.**

***Ejemplos 1.3***

Diga cuáles de las siguientes sucesiones son monótonas, y de serlo, indique su tipo.

19. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

***Solución***: de donde: $\{a_{n+1}\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$, comparando $a_n$ con $a_{n+1}$ tenemos:

$$\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n+1}$$

en base a la definición de una sucesión, los denominadores no son negativos por lo que $n+1 > n$ es decreciente para cualquier valor de $n$ (entero positivo) por lo que la sucesión es decreciente $(a_n > a_{n+1})$ y por lo tanto monótona.

20. $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{2n+2}\right\}$

***Solución***:

$$a_n = \left\{\frac{n^2}{2n+2}\right\}$$

$$a_{n+1} = \left\{\frac{(n+1)^2}{2(n+1)+2}\right\} = \left\{\frac{n^2+2n+1}{2n+4}\right\}$$

comparando $a_n$ con $a_{n+1}$:

$$\frac{n^2}{2n+2} < \frac{n^2+2n+1}{2n+4}$$
$$n^2(2n+4) < (2n+2)(n^2+2n+1)$$
$$2n^3+4n^2 < 2n^3+4n^2+2n+2n^2+4n+2$$
$$0 < 2n^2+6n+2$$

$\therefore$ es monótona, estrictamente creciente.

21. $a_n = \left\{\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right\}$

***Solución***:

$$a_n = \left\{\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right\}$$

$$a_{n+1} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)^2+1}\right\} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+2n+2}\right\}$$, comparando

$$\begin{matrix} a_n & & a_{n+1} \\ \frac{(-1)^n(n)}{n^2+1} & < & \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+2n+2} \end{matrix}$$
$$(-1)^n n(n^2+2n+2) < (-1)^{n+1}(n+1)(n^2+1)$$
$$(-1)^n(n^3+2n^2+2n) < (-1)^{n+1}(n^3+n^2+n+1)$$

si $n$ es impar $-$ $<$ $+$

si $n$ es par $+$ $>$ $-$

Como no pueden darse las dos condiciones a la vez, entonces no se cumple la condición de monotonía, por lo tanto, no es ni creciente ni decreciente, no es **monótona**.

22. $a_n = \left\{\frac{e^n}{\ln n}\right\}$

***Solución***:

$$a_n = \frac{e^n}{\ln n}, \quad a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{\ln(n+1)}$$

$$e^n \ln(n+1) < e^n e \ln n$$
$$\ln(n+1) < e \ln n$$

$\therefore$ Es monótona estrictamente creciente.

23. $a_n = \{sen\, n\pi\}$

***Solución***: Al desarrollar los términos de esta sucesión observemos que todos sus términos son cero. Por lo tanto es una sucesión constante y por consiguiente es monótona.

***Ejercicios 1.3***

Determinar cuáles de las siguientes sucesiones son monotonas.

1. $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$
2. $\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$
3. $\{3^n\}$
4. $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$
5. $\{n^2+n+4\}$
6. $\{\cos n\pi\}$
7. $\left\{\frac{(-1)^n}{n^3}+1\right\}$
8. $\{(-1)^{n+2}(n^2)\}$
9. $\left\{\frac{(-1)^n n^3+1}{n}\right\}$
10. $\left\{\frac{\ln n}{e^n}\right\}$

## 1.4 SUCESIONES ACOTADAS

Si todos los valores de una sucesión no pueden ser menores que un determinado número y tampoco pueden ser mayores que un número determinado, se dice que la sucesión es acotada.

Al número más pequeño se le denomina **cota inferior (m)** y al número más grande se le llama **cota superior (M)**.

Para que una sucesión sea acotada, debe tener tanto la **cota superior** como **la cota inferior**.

***Ejemplos 1.4***

Determinar cuáles de las siguientes sucesiones son acotadas.

24. $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

***Solución***:

$$a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right\}$$ y al tomar su límite tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

se observa que $0 \le a_n \le 1$ y es acotada.

25. $\{a_n\} = \left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$

***Solución***:

$$a_n = \left\{1, \frac{4}{5}, \frac{6}{10}, \frac{8}{17}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ , aplicando la Regla de L'HOPITAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n} = 0$$

sus cotas son 0 y 1, o sea

$0 \le a_n \le 1$ entonces es acotada.

26. $a_n = \left\{\frac{2n^3+n}{3n+1}\right\}$

***Solución***:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{18}{7}, \frac{57}{10}, \frac{132}{13} \ldots\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n}{3n+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ ; aplicando la regla de L'HOPITAL

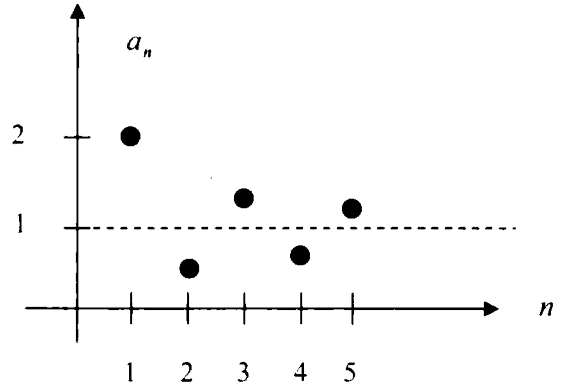
$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+1}{3} = \infty$$

no es acotada, ya que no existe su cota superior (infinito no es un número) $\frac{3}{4} \le a_n < \infty$.

27. $\{a_n\} = \left\{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

***Solución***: Si tabulamos y graficamos la función, tenemos:

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | $\frac{4}{3}$ |
| 4 | $\frac{3}{4}$ |
| 5 | $\frac{6}{5}$ |
| 6 | $\frac{5}{6}$ |




De la gráfica anterior, observamos que su cota inferior es ½ y su cota superior es 2; al tomar su límite tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$$ aplicando el teorema 1.2.10:

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1+0=1$$

y observamos que no siempre su límite es una de sus cotas. La sucesión anterior es acotada $\frac{1}{2} \le a_n \le 2$

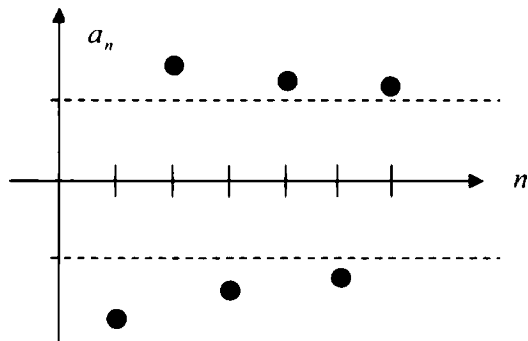
**Teorema 1.4.1**
Toda sucesión monótona acotada es convergente

***Ejemplos***

28. $\{a_n\} = \left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$

***Solución***: Graficando la función tenemos:

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $-2$ |
| 2 | $\frac{3}{2}$ |
| 3 | $-\frac{4}{3}$ |
| 4 | $\frac{5}{4}$ |
| 5 | $-\frac{6}{5}$ |
| 6 | $\frac{7}{6}$ |



De la gráfica observamos que la sucesión no es convergente ya que tiene dos límites, 1 y $-1$ y sus cotas son: inferior $-2$, superior 3/2; y $\therefore$ es acotada.

29. Indique si la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+2}\right\}$ es monótona y convergente.

***Solución***:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+2} = 0 \quad \therefore \quad \text{converge.}$$

$$a_n \qquad a_{n+1}$$

$$\frac{1}{n^2+2} \qquad \frac{1}{(n+1)^2+2}$$

$$\frac{1}{n^2+2} \qquad \frac{1}{n^2+2n+3}$$

$$n^2+2n+3 \quad n^2+2$$

$$2n+1>0 \quad \therefore \text{ es monótona decreciente}$$

## *Ejercicios 1.4*

Indique cuáles de las siguientes sucesiones son acotadas.

1. $\left\{\frac{n+4}{2n-5}\right\}$
2. $\left\{\frac{n^4}{n^3+2}\right\}$
3. $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$
4. $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^4}\right\}$
5. $\left\{(-1)^n\frac{2}{n^2}\right\}$
6. $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right\}$
7. $\left\{(-1)^n\frac{n^2}{n^3+2}\right\}$
8. $\{sen(n+2n\pi)\}$
9. $\left\{\frac{e^n}{\ln(n+1)}\right\}$
10. $\left\{\frac{n^3}{e^n}\right\}$

## *1.5 ALGUNAS FORMAS INDETERMINADAS*

En diversas ocasiones, cuando tratamos de averiguar si una sucesión converge o diverge, se presentan indeterminaciones de las formas $\infty/\infty$ o 0/0 en cuya solución se aplica en forma directa la Regla de L'HOPITAL, la cual consiste en derivar por separado numerador y denominador.

Esta derivación se puede seguir aplicando tantas veces como se presenten cocientes de $\infty/\infty$ o $0/0$.

**Teorema.** ***Regla de L'HOPITAL***

Sean $f$ y $g$ funciones diferenciales en un intervalo abierto $I$, excepto posiblemente en un número $a$ en $I$. Y si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$; entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

***Ejemplos 1.5***

Calcular los siguientes límites.

30. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 6x^2}{x^4 + x^3} = \dfrac{\infty}{\infty}$

***Solución***: Aplicando la Regla de L'HOPITAL

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + 12x}{4x^3 + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando de nuevo la Regla de L'HOPITAL

$$\lim_{x \to \infty} \frac{12x + 12}{12x^2 + 6x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{12}{24x + 6} = \frac{12}{\infty} = 0$$

31. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \dfrac{\infty}{\infty}$

***Solución***: Aplicando la Regla de L'HOPITAL

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6x} = \frac{\infty}{\infty}$$

si aplicamos nuevamente la Regla de L'HOPITAL, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6} = \frac{\infty}{6} \to \infty \text{ no tiene límite.}$$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\dfrac{0}{0}$

***Solución***: Aplicando la Regla de L'HOPITAL

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(9+x)^{-1/2}}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(9+x)^{1/2}}=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6}$$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\dfrac{0}{0}$

***Solución***:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2e^{0}=2$$

La regla de L'HOPITAL también se aplica a otro tipo de indeterminaciones, las cuales se llevan a la forma $\infty/\infty$ o $0/0$ como se indica en los siguientes ejercicios:

- ***Indeterminación de la forma*** $\infty\cdot 0$.

  Cuando al tratar de obtener un límite formado por un producto de dos funciones.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\infty\cdot 0$$

  Mandamos una de las dos funciones al denominador para tener el cociente de la forma:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\infty}{\infty}$$

  el cual ya se puede resolver utilizando la regla de L'HOPITAL.

## *Ejemplos*

34. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\ln x=0\cdot\infty$

***Solución***:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{1} = \frac{-2(0)}{1} = 0$$

- Una indeterminación de la forma $0^0$ se puede trabajar de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^0$$

$$\lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\lim_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\infty/\infty}$$

y se aplica la Regla de L'HOPITAL.

35. $\lim_{x\to -1} (x+1)^{x+1} = 0^0$

***Solución***:

$$\lim_{x\to -1} e^{\ln(x+1)^{x+1}} = \lim_{x\to -1} e^{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{x\to -1} e^{\frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{(x+1)}}} =$$

$$e^{\lim_{x\to -1} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{(x+1)}}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$e^{\lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{\lim_{x\to -1} -\frac{(x+1)^2}{x+1}} = e^{\lim_{x\to -1} -(x+1)} = e^0 = 1$$

- Una indeterminación de la forma $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \infty^0$ se trabaja de una manera análoga a la anterior.

36. $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$

***Solución***:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}, \text{ derivando, } e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$$

- Una indeterminación de la forma $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$ se trabaja de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}\right]$$

37. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]=\infty-\infty$

***Solución***:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{(x-1)\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x^2}}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

## *Ejercicios 1.5*

Resuelva los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x+1}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$
4. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x+1}-\frac{x^3}{x-1}\right]$
5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)$
6. $\lim_{x\to 0}(sen\, x)^{sen\, x}$
7. $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}$
8. $\lim_{x\to\infty}(e^x)^{e^{-x}}$
9. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{e^{x^2}}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{sen\, x}-\frac{1}{x}$

# CAPÍTULO II

# SERIES

## 2.1 DEFINICIÓN

Una serie es la suma de los términos de una sucesión. Sea $\{a_n\}$ una sucesión, cuyos términos son: $a_1$, $a_2$, $a_3$,..., $a_n$; a partir de ella podemos formar una serie de la siguiente forma: Si denotamos por $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ a los términos de la serie tenemos:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n
\end{aligned}
$$

en donde a $s_n$ se le llama suma n-ésima o término general de la serie. Una serie puede tener un número limitado de términos, conocida a esta como **Serie Finita** y su representación común es:

a) $s_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i$ (de cinco términos)

b) $s_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i$ (de diez términos)

Si el número de términos es **Infinito**, la serie se conoce como **Infinita** y su representación es:

$$s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

<u>*Ejemplos 2.1*</u>

1. Dada la sucesión indicada, encuentre los términos de la serie que se genera, esto es, si

   a) $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n = 1,2,\ldots,n$

la cual también es denotada por: $a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$, se tiene:

$$s_1 = a_1 = 1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24}$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

La serie obtenida es una nueva sucesión formada por $\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{50}{24}, \cdots\right\}$

b) $a_n = \left\{\frac{1}{n^2+2}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{1}{18} \cdots\right\}$

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{3}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} = \frac{39}{66}$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{18} = \frac{768}{1188}$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{18} + \cdots + \frac{1}{n^2+2}$$

La serie obtenida es $\left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{39}{66}, \frac{768}{1188}, \cdots\right\}$.

c) $a_n = \{\ln n\}$, $a_n = \{0, 0.693, 1.098, 1.386, \ldots\}$

$$s_1 = a_1 = 0$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 0 + 0.693 = 0.693$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 0.693 + 1.098 = 1.791$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 0.693 + 1.098 + 1.386 = 3.177$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = 0 + 0.693 + 1.098 + 1.386 + \ldots + \ln n$$

La serie obtenida es $\{0,\ 0.693,\ 1.791,\ 3.177,\ldots\}$

*Ejercicios 2.1*

Encuentre los cuatro primeros términos de las siguientes series.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3+2n+1\right)$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} e^n \ln n$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{\ln n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{e^{n+1}}$

## 2.2 PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Veamos ahora una sucesión muy utilizada tanto en matemáticas como en contabilidad conocida como **progresión aritmética**, en la cual todos los términos posteriores al primero se obtienen del anterior añadiéndole una cantidad constante $d$ que es la razón de la progresión.

Si llamamos $a$ al primer termino y $d$ a la razón o diferencia común, tenemos:

$$\{a_n\}=\{a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(n-1)d\}$$

Al n-ésimo término de la progresión lo representaremos con la letra $L_n$ y entonces:

$$L_n = a+(n-1)d$$

*Ejemplos 2.2*

2. Dada la sucesión 1, 4, 7, 10,..., se tiene que el primer término es $a=1$ y la razón de cambio $d$, obtenemos de la diferencia del término $d=a_{n+1}-a_n$ es decir:

$$4-1=7-4=10-7=3=d$$

Por lo tanto el n-ésimo término lo podemos encontrar utilizando la expresión $L_n = a+(n-1)d$. Por ejemplo, el octavo término será:

$$L_8 = 1+(8-1)\ 3 = 1+7(3) = 22$$

Comprobación: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22.

3. Dada la progresión aritmética: $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \cdots$, obtenga el término 99.

***Solución:***

$$a = \frac{1}{5}$$

$$d = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$L_{99} = a + (n-1)d$$

$$= \frac{1}{5} + (99-1)\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + (98)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{196}{5} = \frac{197}{5}$$

<u>*Ejercicios 2.2*</u>

Dadas las siguientes progresiones aritméticas, encuentre el término indicado.

1. $2,6,10,14,\ldots$ , $L_{10} = ?$
2. $\frac{5}{6}, \frac{8}{6}, \frac{11}{6}, \frac{14}{6}, \cdots$, $L_{12} = ?$
3. $0.1, 0.4, 0.7, 1.0, \ldots$, $L_{30} = ?$
4. $1,10,19,28,\ldots$ , $L_{95} = ?$

## 2.3 SUMA DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA (SERIE ARITMÉTICA)

Dada una progresión aritmética finita de $n$ elementos, encontremos la suma $s_n$ de sus $n$ términos conocida como **"Serie Aritmética".**

Para ello definamos a esta suma en dos formas diferentes, en forma creciente:

$$s_n = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots + L_n$$

y en forma decreciente:

$$s_n = L_n + (L_n - d) + (L_n - 2d) + (L_n - 3d) + \ldots + a$$

Sumando estas dos ecuaciones tenemos:

$$2s_n = (a + L_n) + (a + L_n) + (a + L_n) + (a + L_n) + \ldots + (a + L_n) = n(a + L_n)$$

por lo tanto, su suma estará dada por la expresión:

$$s_n = \frac{n}{2}(a + L_n)$$

o bien por:

$$s_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

## *Ejemplos 2.3*

4. Dadas las sucesiones indicadas:
   i. Demuestre que es una progresión aritmética.
   ii. Encuentre el término indicado.
   iii. Obtenga la suma de los términos indicados.
   1. $1, 5, 9, 13, \ldots$ $\quad L_8 = ?$ $\quad s_{10} = ?$
   2. $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$ $\quad L_{10} = ?$ $\quad s_{12} = ?$
   3. $0.5, 1.5, 2.5, 3.5, \ldots$ $\quad L_{14} = ?$ $\quad s_{50} = ?$

***Solución 1***

i. $5 - 1 = 9 - 5 = 4$, sí es una progresión aritmética

ii. $L_8 = a + (n-1)\ d$

$a = 1,\ \ d = 4$

$L_8 = 1 + (8-1)4 = 1 + 7(4) = 29$

iii.

$$s_{10} = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$s_{10} = \frac{10}{2}(2(1) + (10-1)4) = 5(2 + 9(4)) = 190$$

***Solución 2***

i. $\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$, sí es una progresión aritmética

ii. $a = \frac{1}{4},\ \ d = \frac{1}{4}$

$$L_{10} = a + (n-1)d$$
$$= \frac{1}{4} + (10-1)\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}$$

iii. $s_{12} = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$$s_{12} = \frac{12}{2}\left(2\left(\frac{1}{4}\right)+(12-1)\frac{1}{4}\right) = 6\left(\frac{2}{4}+\frac{11}{4}\right) = \frac{78}{4}$$

***Solución 3***

i. $1.5-0.5 = 2.5-1.5 = 1$, sí es una progresión aritmética

ii. $L_{14} = a+(n-1)d$
$a = 0.5$, $d = 1$

$$L_{14} = 0.5(14-1)\ 1 = 0.5+13 = 13.5$$

iii. $s_{50} = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

$$s_{50} = \frac{50}{2}(2(0.5)+(50-1)\ 1) = 25(1+49) = 1250$$

5. Una persona recibe \$2 el primer día, \$4 el segundo, \$6 el tercero, etc., ¿Cuántos dólares habrá recibido a lo largo de 30 días?

***Solución***: 2,4,6,8,...
$a = 2$, $d = 2$, $n = 30$

$$s_{30} = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

$$s_{30} = \frac{30}{2}(2(2)+(30-1)2) = 15(4+58) = 930 \text{ dólares}$$

6. Un vehículo se desplaza sobre un plano inclinado partiendo del reposo, en el primer minuto recorre 5 metros, en el segundo 9, en el tercero 13, etc. Calcular el tiempo que tardará en recorrer 240 metros.

***Solución***: 5, 9,13,...
$a = 5$, $d = 9-5 = 4$, $s = 240$, $n = t = ?$

$$s = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

$$240 = \frac{n}{2}(2(5)+(n-1)4)$$

$$480 = n(10+4n-4) = n(6+4n) = 6n+4n^2$$

$$4n^2+6n-480 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4(4)(-480)}}{8} = \frac{-6\pm 87.84}{8}$$

La solución negativa se descarta y la solución es 10.23 minutos.

*Ejercicios 2.3*

Dadas las sucesiones siguientes,
i. Encuentre el término indicado
ii. Obtenga la suma de los términos pedidos

1. 3,6,9,12 $L_{10}$ $s_{10}$
2. 0.5,2.5,4.5 $L_{20}$ $s_{20}$
3. $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}$ $L_{12}$ $s_{12}$
4. $\frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}$ $L_{50}$ $s_{50}$
5. 5, 10, 15 $L_{100}$ $s_{100}$

## 2.4 CONVERGENCIA DE SERIES INFINITAS

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si es posible encontrar $s_n$ o sea el término que nos represente a cada término de las sumas parciales, y si existe $\lim_{n=\infty} s_n = s$ (un número) se dice que la serie **converge** y su suma es $s$; si su límite no existe, la serie **diverge**.

Encontrar $s_n$ es sumamente difícil, salvo en un grupo reducido de series (conocidas como series telescópicas) en las cuales, al realizar la suma se eliminan todos los términos, excepto el primero y el último término, obteniéndose entonces $s_n$.

*Ejemplos 2.4*

7. Dada la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

   i. Obtener (de ser posible) una fórmula para $s_n$.
   ii. En caso afirmativo diga si la serie converge o diverge.

   ***Solución*:**
   i. Por medio de fracciones parciales propias, podemos escribir:

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n-1}$$

Quitando denominadores:

$$1 = A(2n-1) + B(2n+1) = 2An - A + 2Bn + B$$
$$= n(2A + 2B) + (-A + B)$$

Estableciendo el sistema de ecuaciones:

$$2A + 2B = 0 \quad ..................(1)$$
$$-A + B = 1 \quad ..................(2)$$

Resolviendo este sistema, multiplicando (2) por 2 y sumándolas

$$2A + 2B = 0$$
$$-2A + 2B = 2\,, \text{ de donde } \quad B = \frac{1}{2}$$
$$0 + 4B = 2$$

Sustituyendo este valor en (2), $-A + \frac{1}{2} = 1$ , de donde $A = -\frac{1}{2}$ , por lo tanto:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Dando valores a $n$:

$$n = 1 \,,\ a_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$n = 2 \,,\ a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$
$$n = 3 \,,\ a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$
$$n = 4 \,,\ a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)$$
$$\vdots$$
$$n = n-1 \,,\ a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right)$$
$$n = n \,,\ a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

la suma de los $n$ términos será:

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)$$

de donde:

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$$

por lo tanto $s_n = \frac{n}{2n+1}$ es el término general de la serie.

ii. Tomamos $\lim_{n\to\infty} s_n$, sustituyendo $s_n$ y aplicando la Regla de L'HOPITAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

por lo que se deduce que la serie es convergente y su suma es $\frac{1}{2}$.

Por lo general, no es posible encontrar una expresión para $s_n$ en términos de $n$; por lo que se deben de utilizar una serie de criterios para determinar si una serie infinita converge o diverge.

Estos criterios nos indican si la serie converge o diverge, pero no a qué valor tiende su suma (cuando esto suceda).

Antes de comentar estos criterios presentemos algunos teoremas de mucha importancia en la convergencia o divergencia de una serie.

**Teorema 2.4.1**

Una condición necesaria pero no suficiente para que una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja, es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Teorema 2.4.2**

Este teorema es más útil que el anterior y dice: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie es divergente.

***Ejemplos 2.4***

Utilizando los teoremas anteriores, analice las series siguientes.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 0$$

Por lo tanto, es posible que converja (teorema 2.4.1).

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{2} = \infty$$

Por lo tanto, la serie diverge (teorema 2.4.2).

**Teorema 2.4.3**

Si dos series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ difieren solamente en sus $n$ primeros términos $a_v = b_v$ si $v > n$, entonces ambas series convergen o divergen.

**Teorema 2.4.4**
Sea $c$ una constante diferente de cero, entonces:

| Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | Entonces $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ |
|---|---|
| Converge con suma $s$ | Converge con suma $cs$ |
| Diverge | Diverge |

**Teorema 2.4.5**
Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series infinitas, entonces:

| $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ | $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ | $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ |
|---|---|---|---|
| Converge con suma $R$ | Converge con suma $S$ | Converge con suma $R+S$ | Converge con suma $R$-$S$ |
| | Diverge | Diverge | Diverge |
| Diverge | Converge suma $R$ | Diverge | Diverge |
| | Diverge | Puede o no Divergir | Puede o no Divergir |

**Teorema 2.4.6**
Si a una serie se le suman o restan un número finito de términos, esto no afecta su convergencia o su divergencia.

**Teorema 2.4.7**
Una serie de términos positivos es convergente si y sólo si, su sucesión de sumas parciales tiene una cota superior.

**Progresión Geométrica**

Cuando tenemos un término $(a)$ y el siguiente resulta de multiplicar este término por una razón de cambio $(r)$, $a$, $ar$, $ar^2$, $ar^3,\ldots$, decimos que tenemos una progresión geométrica, cuyo término general está dado por $a_n = ar^{n-1}$:

## *2.5 SERIE GEOMÉTRICA*

Una serie geométrica es aquella suma $s_n$ de términos en la cual el término posterior se obtiene multiplicando al anterior por una constante.

Si al primer término de esta suma lo representamos por la letra $a$ y a la razón de cambio por $r$ tenemos:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Para saber cuándo una serie geométrica converge o diverge procedamos de la siguiente forma: Tomando $n$ términos de la serie tendremos:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \quad .......... (1)$$

Multiplicando (1) por $r$:

$$r(s_n) = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n \qquad (2)$$

Restando (2) de (1):

$$r(s_n) - s_n = a - ar^n$$

$$(1-r)s_n = a - ar^n \ , \quad s_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Si $|r| < 1$, al aumentar $n$, $r^n$ disminuye en valor absoluto y:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0, \text{ por lo que, } \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} = s \quad \therefore \text{ converge}$$

Si $|r| \geq 1$, $r^n$ aumentará indefinidamente cuando $n$ crece, por lo tanto la serie será divergente.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \infty$$

Resumiendo tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{converge para } |r| < 1 \\ \text{diverge para } |r| \geq 1 \end{cases}$$

*Ejemplos 2.5*

10. Indicar si la serie geométrica $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ converge o diverge.

**Solución:** Observando la serie de términos, vemos que el primer término $a$ es igual a uno, y la razón de cambio $r$ es un cuarto $\left(r = \frac{1}{4}\right)$.

$$|r| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

Como $r < 1$ la serie es convergente y su suma tiende a:

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

11. Diga si la serie $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$ converge o diverge.

**Solución:** $a = 3$, $r = 2$

$$|r| = |2| = 2 > 1 \quad \therefore \quad \text{Diverge}$$

12. Dada la serie $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, encontrar el décimo término y la suma de sus quince primeros términos.

**Solución:** $a = 1$, $r = 2$, $n = 10$, $a_n = ar^{n-1}$, $a_{10} = ar^{10-1} = (1)2^{10-1} = 512$. La suma está dada por:

$$s_{15} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1(1-2^{15})}{1-2} = \frac{1(1-32768)}{-1} = \frac{-32767}{-1} = 32767$$

13. La suma de una serie geométrica es 15 y su primer término es 1, ¿qué valor debe tener $r$?

**Solución:** $s = 15$, $a = 1$, $r = ?$

$$s=\frac{a}{1-r}\text{, despejando } r\text{, } 15=\frac{1}{1-r}\text{, } r=\frac{14}{15}$$

*Ejercicios 2.5*

Diga cuáles de las siguientes series geométricas convergen

1. $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\sum_{n=1}\frac{1}{5^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n$

Introducimos una nueva serie, conocida como serie Hiperarmónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

la cual converge cuando $p>1$ y diverge para $p\leq 1$. La demostración de la conclusión anterior la efectuaremos posteriormente.

Estas dos series anteriores (la geométrica y la hiperarmónica), nos servirán para analizar la convergencia o divergencia de una serie en los primeros métodos de solución que utilizaremos.

## 2.6 SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Hemos mencionado que para que una serie converja es necesario obtener el término genérico de la sucesión que genera la serie ($s_n$) y después tomar su límite cuando el número de términos ($n$) tiende a infinito; también hemos mencionado que esto es muy complicado y en diversos casos imposible, por ello para analizar la convergencia de una serie podemos utilizar diversos criterios que nos indican si una serie converge o no, pero no a qué valor converge en su caso.

Nos dedicaremos inicialmente a aquellas series en que todos sus términos son positivos (series de términos positivos).

Los tres primeros criterios se aplican exclusivamente a series de términos positivos.

### 2.6.1 Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos, entonces.

| Si $\sum b_n$ | Para toda $n$ | Entonces $\sum a_n$ |
|---|---|---|
| Converge | $a_n \leq b_n$ | Converge |
| Diverge | $a_n \geq b_n$ | Diverge |

Las situaciones no consideradas en este cuadro no tienen solución por medio de este criterio.

## *Ejemplos 2.6.1*

14. Utilizando el criterio de comparación, determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+4^n}$ converge o diverge.

***Solución*:** La serie desconocida es:

$$\sum a_n \text{, o sea, } \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+4^n}$$

Tomamos una serie que sea alguna de las dos mencionadas anteriormente para poder utilizar el criterio de comparación. Esta sumatoria la llamamos la $\sum b_n$ y en este caso será una serie geométrica que elimine a las constantes, es decir:

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

en la cual

$$a = \frac{1}{4} \text{ y } r = \frac{1}{4}$$

Como $|r| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ es menor que uno, la serie converge, es decir, $\sum b_n$ converge, y observando el cuadro anterior comparamos $a_n$ con $b_n$ y $a_n \leq b_n$,

$$\frac{1}{3+4^n} \leq \frac{1}{4^n}$$

Quitando los denominadores, los cuales no pueden ser negativos, tendremos $4^n \leq 3+4^n$ , lo cual se cumple, por lo tanto:

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+4^n} \quad \text{es convergente.}$$

15. Utilizando el criterio de comparación, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+2)}$ converge o diverge.

***Solución*:**

$$\sum a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$$

Tomamos la máxima potencia de $n$ para definir a $\sum b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, la cual vemos que es una serie hiperarmónica con $p=2>1$, por lo tanto converge.
Comparando, $a_n\leq b_n$:

$$\frac{1}{n^2+2n}\leq\frac{1}{n^2}$$

Quitando denominadores $n^2\leq n^2+2n$, por lo tanto la serie converge.

16. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ es convergente o divergente.

***Solución*:**

$$\sum a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$$

Comparamos con la serie geométrica:

$$\sum b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots$$

donde $a=\frac{1}{3}$ y $r=\frac{1}{3}$. Como $|r|=\left|\frac{1}{3}\right|<1$, la serie $\sum b_n$ converge. Utilizando la segunda parte del criterio de comparación:

$$a_n\leq b_n\quad,\quad\frac{1}{3^n+1}\leq\frac{1}{3^n}$$

Quitando denominadores: $3^n\leq 3^n+1$, por lo tanto, la serie converge.

17. Diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+5)$ converge o diverge.

***Solución***:

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5)$$

y comparamos con $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

que es una serie geométrica con $r = 2 > 1$, hay divergencia. Comparando $a_n$ con $b_n$: $a_n \geq b_n$. $2^n + 5 \geq 2^n$ lo que se cumple y la serie es divergente.

***Ejercicios 2.6.1***

Utilizando el criterio de comparación diga cuáles de las siguientes series convergen o divergen

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 4}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 8}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5 + 2n}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n + n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n^2 + 3n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+2}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+8}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n + 7}$

### *2.6.2 Criterio de comparación por límites*

Sean las $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos, entonces:

| Sí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ | y $\sum b_n$ | Entonces $\sum a_n$ |
|---|---|---|
| $c > 0$ | Converge | Converge |
| | Diverge | Diverge |
| $c = 0$ | Converge | Converge |
| $c = +\infty$ | Diverge | Diverge |

En otros casos, este criterio no se aplica.

*Ejemplos 2.6.2*

18. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n+1)^{4/3}}$ es convergente o divergente.

***Solución***: $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n+1)^{4/3}}$.

Tomemos como potencia máxima a $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^{4/3}}$, entonces $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}}$

que es una serie hiperarmónica con $p = \frac{8}{3} > 1$ y por lo tanto converge.

Aplicando el criterio de comparación por límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n^2+n+1)^{4/3}}}{\frac{1}{(n^2)^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)^{4/3}}{(n^2+n+1)^{4/3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^{4/3}$$

Aplicando Regla de L'HOPITAL:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1}\right)^{4/3} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1}\right)^{4/3} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2}\right)^{4/3} = 1 = c > 0$$

por lo tanto la serie converge.

19. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^4+4)^{3/4}}$ converge o diverge.

***Solución***: Considerando a

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^4)^{3/4}}, \text{ se tiene que } \sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

la cual es una serie Hiperarmónica con $p = 3 > 1$ y por lo tanto converge.

Aplicando el criterio de comparación por límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n^4+4)^{3/4}}}{\frac{1}{(n^4)^{3/4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^4)^{3/4}}{(n^4+4)^{3/4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^4+4}\right)^{3/4}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^4/n^4}{n^4/n^4 + 4/n^4}\right)^{3/4} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{n^4}}\right)^{3/4} = 1 = c > 0$$

y por lo tanto ambas series convergen.

20. Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ converge o diverge.

***Solución***: $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

Sea $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es una serie Hiperarmónica con $p = 2 > 1$ la cual converge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+3n+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ también converge.

21. Indique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{2^n(n^2+2n+2)}$ converge o diverge.

***Solución***: Sea

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

que es una serie geométrica con

$a = \frac{1}{2}$ y $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

y por lo tanto converge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2}{2^n(n^2+2n+2)}}{\frac{n^2}{2^n n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2)}{(n^2+2n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1 > 0$$

y por lo tanto $\sum a_n$ también converge.

***Ejercicios 2.6.2***

Utilizando el criterio de comparación por límite, diga el carácter de las series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3 + 2n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^3} + 2n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,!}{(n-1)\,!}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{\left(n^2+5\right)^{3/2}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n\,!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+5^n}{3+4^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\left(n^2+3\right)^{3/2}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-5n}{n^3}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+n^2+2n}{n^6+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)\,!}{(n+2)(n+1)}$

### *2.6.3 Criterio de la integral*

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ y sea $f$ una función continua, positiva, monótona no creciente en el intervalo $[1,+\infty)$; entonces si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es un número, la serie converge, o si $\int_1^{\infty} f(x)dx \to \pm\infty$ la serie diverge, como puede observarse en la figura 2.1.

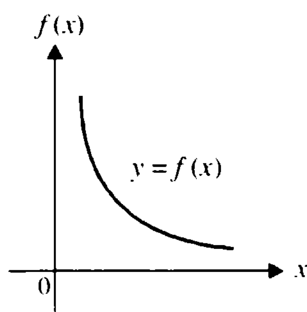



Figura 2.1

***Ejemplos 2.6.3***

22. Utilizando el criterio de la integral diga si la sumatoria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ es convergente.

***Solución***: Calculamos $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3+1}dx$ haciendo $v = x^3 + 1$ y $dv = 3x^2dx$ y completando la diferencial de la integral:

$$\frac{1}{3}\int_1^{\infty}\frac{3x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left|\ln\left(x^3+1\right)\right|_1^{\infty}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\ln\left(b^3+1\right)-\frac{1}{3}\ln\left(1^3+1\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\infty-\ln 2)\to\infty$$

Por lo tanto diverge.

23. Utilizando el criterio de la integral, diga si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+1)}$$

***Solución***: Calculando la integral $\int_1^{\infty}\frac{x+1}{x(x+1)}dx=I$ por fracciones parciales:

$$\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$
$$x+1=A(x+1)+Bx=Ax+A+Bx=x(A+B)+A$$

De donde establecemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{matrix} A+B=1 \\ A=1 \end{matrix}\quad\therefore\quad\begin{matrix} A=1 \\ A+B=1 \end{matrix}\qquad\begin{matrix} 1+B=0 \\ B=0 \end{matrix}$$

Entonces:

$$I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx+\int_1^{\infty}\frac{0}{x+1}dx$$
$$=\left|\ln x\right|_1^{\infty}=\lim_{b\to\infty}\ln b-\ln 1=\infty-1\to\infty\quad\therefore\quad \text{Diverge.}$$

24 Por medio del criterio de la integral podemos demostrar cuándo la serie hiperarmónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge o diverge.

***Solución***: Aplicando el criterio de la integral, tenemos:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\left|\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}$$

Cuando $p<1$,

$$\frac{1}{(1-p)x^{1-p}}=\frac{x^{p-1}}{1-p}$$

crecerá y por lo tanto tenderá a infinito y será divergente. Si $p = 1$, se hace cero $1 - p$ y se indetermina el denominador, por lo tanto es divergente. Cuando $p > 1$,

$$\frac{1}{(1-p)x^{1-p}}$$

tenderá a cero y, por lo tanto, será convergente.

Resumiendo, la serie hiperarmónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p \leq 1, \text{ diverge} \\ p > 1, \text{ converge} \end{cases}$$

*__Ejercicios 2.6.3__*

Utilizando el criterio de la integral, indique cuáles de las siguientes series convergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{\sqrt{1-e^{4n}}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+4n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

## 2.7 SERIES ALTERNADAS

Se dice que se tiene una serie alternada cuando un término es positivo y el siguiente negativo, o el primero es negativo y el siguiente positivo y así sucesivamente. Esto es,

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \text{ , o también , } -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

### *2.7.1 Criterio para las series alternadas*

Si una serie es alternada, esta converge si cumple con las dos condiciones siguientes:

$$1) \lim_{n \to \infty} |a_n| = 0 \quad , \quad 2) \; |a_{n+1}| < |a_n|$$

NOTA: Este criterio no es aplicable a una serie de términos positivos.

***Ejemplos 2.7.1***

25. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ es una serie alternada y si converge o diverge.

***Solución:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \ldots \text{ y es una serie alternada.}$$

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} \;,\; |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}$$

1) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

2) $|a_{n+1}| < |a_n| \;,\; \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \;,\; n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow n < n+1$

por lo tanto se cumplen las dos condiciones y la serie alternada converge.

26. Demuestre si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n(n+3)}$ converge o diverge.

***Solución:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^2+3n} = \frac{3}{4} - \frac{4}{10} + \frac{5}{18} - \frac{6}{28} + \ldots$$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = 0$

2) $|a_n| = \frac{n+2}{n^2+3n} \;,\; |a_{n+1}| = \frac{n+3}{(n+1)^2+3(n+1)} = \frac{n+3}{n^2+5n+4}$

$$|a_{n+1}| < |a_n| \;,\; \frac{n+3}{n^2+5n+4} < \frac{n+2}{n^2+3n}$$

$$(n+3)(n^2+3n) < (n+2)(n^2+5n+4)$$
$$n^3+3n^2+3n^2+9n < n^3+5n^2+4n+2n^2+10n+8$$
$$n^3+6n^2+9n < n^3+7n^2+14n+8$$
$$0 < n^2+5n+8$$

Las dos condiciones se cumplen y por lo tanto, la serie es convergente.

27. Dada la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ indique si converge o diverge.

***Solución:***

1) $|a_n| = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ , $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$

$$|a_{n+1}| < |a_n|$$
$$\frac{1}{\ln(n+2)} < \frac{1}{\ln(n+1)}$$
$$\ln(n+1) < \ln(n+2) \Rightarrow n+1 < n+2$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$ $\therefore$ la serie es convergente.

28. Aplicando el criterio de series alternadas diga si converge o diverge la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 4n}{n^3 + 3n}.$$

***Solución:*** Este criterio no se aplica ya que es una serie de términos positivos.

29. Aplicando el criterio de series alternadas diga si converge o diverge la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+2)}{e^n}$$

***Solución:*** $|a_n| = \dfrac{\ln(n+2)}{e^n}$ , $|a_{n+1}| = \dfrac{\ln(n+3)}{e^{n+1}}$

1) $|a_{n+1}| < |a_n|$

$$\frac{\ln(n+3)}{e^{n+1}} < \frac{\ln(n+2)}{e^n} \quad , \quad e^n \ln(n+3) < e^{n+1} \ln(n+2), \; n+3 < (n+2)^e$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{e^n} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+2)e^n} = 0$

Como estas condiciones se cumplen, se concluye que la serie converge.

30. Diga si la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{5}{\sqrt{n+1}}$ converge o diverge.

***Solución:*** $|a_n| = \dfrac{5}{\sqrt{n+1}}$ , $|a_{n+1}| = \dfrac{5}{\sqrt{n+2}}$

1) $|a_{n+1}| < |a_n|$

$$\frac{5}{\sqrt{n+2}} < \frac{5}{\sqrt{n+1}} \quad , \quad 5\sqrt{n+1} < 5\sqrt{n+2}$$

$$2).. \lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n+1}} = 0$$

Las dos condiciones se cumplen, por lo tanto la serie es convergente.

*Ejercicios 2.7.1*

Demuestre cuáles de las siguientes series alternadas son convergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2n}{n^3+n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n+2)}{n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^3}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{\ln(n+3)}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n+1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{1+4^n}{1+3^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n!}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{3n+2}$

## 2.8 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL

Una serie puede ser convergente absolutamente, convergente condicional o divergente, lo que se resume en el siguiente cuadro.

| Si $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ | y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ | Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ |
|---|---|---|
| Convergente | Convergente | Converge Absolutamente |
| | Diverge | Converge Condicionalmente |
| Diverge | Diverge | Diverge |

*Ejemplos 2.8*

30. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n}$ converge absolutamente, condicionalmente o diverge.

***Solución***:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81}+\ldots$$

La cual es una serie alternada, aplicando este criterio tenemos:

$$|a_n| = \frac{2}{3^n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{2}{3^{n+1}} < \frac{2}{3^n} \quad , \quad 2(3^n) < 2(3^{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{\infty} = 0$$

por lo tanto la serie converge. Tomando el valor absoluto de esta serie tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$$

La cual vemos que es una serie geométrica con

$$r = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

por lo tanto converge. Como $\sum a_n$ y $\sum a_n'$ convergen podemos afirmar que la serie es absolutamente convergente.

32. Diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$ converge absolutamente, condicionalmente o diverge.

***Solución:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \ldots \text{ es una serie alternada.}$$

a) $|a_n| = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad , \quad a_{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

$$|a_{n+1}| < |a_n|$$

$$\frac{1}{5^{n+1}} < \frac{1}{5^n} \quad , \quad 5^n < 5^{n+1}$$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

Lo cual se cumple y por lo tanto la serie es absolutamente convergente.

*Ejercicios 2.8*

Diga cuáles de las siguientes series convergen absolutamente, condicionalmente o divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3+2}{n^2+4}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{n}{5^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$

## 2.9 CRITERIO DE LA RAZÓN

Este criterio es el más importante, ya que por un lado lo podemos aplicar, tanto a series de términos positivos, como a series alternadas y cuando converge, esta convergencia es absoluta y nos dice:

Considere la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en donde $a_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, entonces:

1) Si $L<1$, la serie converge absolutamente.
2) Si $L>1$, la serie diverge.
3) Si $L=1$, este criterio no decide.

*Ejemplos 2.9*

33. Utilizando el criterio de la razón, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{2^n}$ converge o diverge.

***Solución***: Tomamos $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$$|a_n| = \frac{n!}{2^n} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{(n+1)\,!}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)\,!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!2^n}{n!2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!2^n}{n!2^n 2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = \infty$$

Como $L=\infty>1$, la serie diverge.

34. Utilizando el criterio de la razón, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$ converge o diverge.

***Solución***:

$$|a_n| = \frac{n+2}{n(n+4)} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{n+3}{(n+1)(n+5)} = \frac{n+3}{n^2+6n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+3}{n^2+6n+5}}{\frac{n+2}{n^2+4n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+3)(n^2+4n)}{(n+2)(n^2+6n+5)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3+7n^2+12n}{n^3+8n^2+17n+10}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n^2+14n+12}{3n^2+16n+17}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{6n+14}{6n+16}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{6}{6}\right| = 1$$

Como $L = 1$, este criterio no decide y habrá que recurrir a otro criterio.

35. Diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ converge o diverge. Utilice el criterio de la razón.

***Solución***:

$$a_n = \frac{n^2}{n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)^2}{(n+1)!n^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2n}\right| = 0$$

Como $L = 0 < 1$ la serie es convergente.

36. Utilizando el criterio de la razón, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2/3}}$ converge o diverge.

***Solución***:

$$|a_n| = \frac{1}{n^{2/3}} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^{2/3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^{2/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{(n+1)^{2/3}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^{2/3} = 1$$

por lo tanto, el criterio no decide.

37. Utilizando el criterio de la razón, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n7^{n+1}}$ converge o diverge.

***Solución***: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n7^{n+1}}$ la podemos escribir como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n7^{n+1}}$,

$$|a_n| = \frac{3^n}{n7^{n+1}} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)7^{n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)7^{n+2}}}{\frac{3n}{n7^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}n7^{n+1}}{3^n(n+1)7^{n+2}}\right|$$

Descomponiendo para eliminar términos, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n 3n7^{n+1}}{3^n(n+1)7^{n+1}7}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n}{7(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n}{7n+7}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1$$

por lo tanto, la serie converge.

38. Utilizando el criterio de la razón, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge o diverge.

***Solución***: $|a_n| = \frac{(\text{n}!)^2}{(2n)!} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{((\text{n}+1)!)^2}{(2(n+1))!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{(2n+2)!(n!)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n)\,!}{(2n+2)(2n+1)(2n)\,!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{4} < 0$$

por lo tanto, converge absolutamente.

## *Ejercicios 2.9*

Utilizando el criterio de la razón, diga cuáles series convergen y cuáles divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2/3}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{e^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+2)^{-1}}{n^{-1/2}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\ln(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3+2n}{2n^3+n-1}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{4}{5}\right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\ln n}$

## 2.10 CRITERIO DE LA RAÍZ

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita en donde $a_n \neq 0$, en estas condiciones:

$$\text{Sí } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \begin{cases} \text{si } L < 1 & \text{converge absolutamente} \\ \text{si } L > 1 & \text{diverge} \\ \text{si } L = 1 & \text{este criterio no decide} \end{cases}$$

Este criterio se aplica tanto a series de términos positivos como alternados.

<u>*Ejemplos 2.10*</u>

39. Utilizando el criterio de la raíz, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{5n+1}}{n^n}$ converge o diverge.

**Solución:** Tomando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{5n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{5n+1}\right)^{1/n}}{\left(n^n\right)^{1/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{5n+1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{5+1/n}}{n} = \frac{2^5}{\infty} = \frac{32}{\infty} = 0$$

Como $0 < 1$, la serie converge absolutamente.

40. Utilizando el criterio de la raíz, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ converge o diverge.

**Solución:**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{1/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+1}{n}\left[\frac{(n^2+1)1-n(2n)}{(n^2+1)^2}\right]}{1}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n(n^2+1)}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n^3+n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{3n^2+1}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{6n}} = e^0 = 1$$

por lo tanto, este criterio no decide

41. Utilizando el criterio de la raíz, diga si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^{3n+1}}{n^{3n}}$ converge o diverge.

***Solución:***

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^{3n+1}}{n^{3n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4^{3n+1}\right)^{1/n}}{\left(n^{3n}\right)^{1/n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{3n/n+1/n}}{n^{3n/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{3+1/n}}{n^3}=\frac{64}{\infty}=0<1$$

por lo tanto, la serie converge

## *Ejercicios 2.10*

Utilizando el criterio de la raíz, diga cuáles series convergen y cuáles divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}}{5^{3n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n+1}}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{5}\right)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{4}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^2+n^3}$

# CAPÍTULO III

# SERIES DE POTENCIAS

### *3.1 DEFINICIÓN*

Hemos trabajado hasta el momento con series de términos constantes; sin embargo son de mayor utilidad aquellas series que son funciones de una nueva variable $x$, tales como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n [f(x)]^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

La razón principal de estudiar estas nuevas series es que pueden usarse en la representación de funciones, lo que nos permite tener una gran aproximación de las funciones trascendentes, así como obtener representaciones de nuevas funciones derivando o integrando las funciones iniciales.

#### Ejemplos 3.1

1. Encontrar los valores de $x$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^n}{n 2^n}$ es convergente.

   ***Solución***: Utilizando el criterio de la razón; tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad , \quad |a_n| = \frac{3^n x^n}{n 2^n} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{(n+1) 2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{3^n x^n}{n 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} x^{n+1} n 2^n}{3^n x^n (n+1) 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n 3 x^n x n 2^n}{3^n x^n (n+1) 2^n 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3xn}{2(n+1)} = \frac{3}{2} x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} x \cdot 1 = \frac{3}{2} x < 1$$

$|x| < \frac{2}{3}$ por propiedad del valor absoluto: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$, $\therefore x \in \left( -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$

Analizando los puntos extremos, si $x = -2/3$ sustituyendo en la serie original:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n2^n}$$

descomponiendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (-1)^n \frac{2^n}{3^n}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} 3^n \frac{2^n}{3^n}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que es una serie hiperarmónica, con $p = 1$ por lo tanto diverge y el extremo del intervalo permanece abierto.

Si $x = 2/3$ la serie original queda como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \frac{2^n}{3^n}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que es una serie alternada. Utilizando el criterio de series alternadas, tenemos:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad , \quad \text{ii) } |a_{n+1}| < |a_n|$$

$$|a_n| = \frac{1}{n} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \quad , \quad |a_{n+1}| < |a_n|$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad , \quad n < n+1$$

Se cumplen las dos condiciones. Por lo tanto, la serie converge y se cierra el intervalo en este extremo. El intervalo solución es:

$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

**Nota:** en el extremo en el cual la serie (analizada en los puntos extremos) converge, se cierra el intervalo y en el extremo en el cual diverge, el intervalo permanece abierto. A este intervalo se le conoce como **intervalo de convergencia** (I.C.) (conjunto de valores de $x$ para los cuales la serie existe). A la mitad del intervalo se le llama **radio de convergencia** (R.C.).

La distancia de $-2/3$ a $2/3$ es igual a $4/3$, como puede observarse en la figura 3.1. El radio de convergencia es $(4/3)/2 = 2/3$; concluyendo:

$$\text{I.C} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad , \quad \text{R.C} = \frac{2}{3}$$

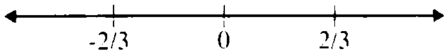


Figura 3.1

2. Encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

*Solución*: Aplicando el criterio de la razón tenemos:

$$|a_n| = \frac{x^n}{n!} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ !}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)\ !}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n x n!}{x^n(n+1)n!}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = |x|\cdot 0 = 0 < 1$$

por lo tanto, la serie es absolutamente convergente para cualquier valor de $x$ ya que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

su intervalo de convergencia son todos los reales $(-\infty,+\infty)$ y su radio de convergencia es R.C = $+\infty$

**Teorema 3.1.1**

Sea el radio de convergencia $R \geq 0$ entonces se cumplen las siguientes condiciones para las series de potencias dadas:

| $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ | $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ |
|---|---|
| 1. si la serie converge solamente para $x=0$ su radio es $R=0$ | Si la serie converge solamente para $x=a$ su radio es $R=0$ |
| 2. si la serie converge absolutamente para toda $x$ su radio $R=\infty$ | Si la serie converge absolutamente para toda x su radio es $R=\infty$ |
| 3. la serie para toda $x$:<br>a) converge abs si $\lvert x\rvert < R$<br>b) diverge si $\lvert x\rvert > R$ | La serie para toda $x$:<br>a) converge abs si $\lvert x-a\rvert < R$<br>b) diverge si $\lvert x-a\rvert > R$ |

**Teorema 3.1.2**

Si una serie de potencias:

| En un punto extremo | En el otro | Entonces |
|---|---|---|
| Converge absolutamente | Converge absolutamente | Converge absolutamente en los dos puntos. |
| Converge | Diverge | Converge condicionalmente en el punto en el que converge |
| Diverge | Diverge | Diverge en los dos puntos. |

3. Encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n}$.

***Solución***:

$$|a_n| = \frac{n^2 x^n}{5^n} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{n^2 x^n}{5^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 x^{n+1} 5^n}{n^2 x^n 5^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 x^n x 5^n}{n^2 x^n 5^n 5}\right| = \frac{|x|}{5}\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right| = \frac{|x|}{5}\cdot 1 = \frac{|x|}{5} < 1$$

de donde $|x| < 5$, o sea $-5 < x < 5$; $\therefore x \in (-5{,}5)$.

Analizando los puntos extremos, si $x = -5$, la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(-1)^n 5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

la cual es una serie alternada; aplicando este criterio:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} n^2 \to \infty \therefore \text{ diverge.}$$

Si $x = 5$, la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

la cual diverge por lo que el intervalo de convergencia es $(-5{,}5)$ y el radio de convergencia (R.C) = 5.

4. Encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}$.

***Solución***: Aplicando el criterio de la razón:

$$|a_n|=\frac{(x+3)^n}{4^n}\quad,\quad |a_{n+1}|=\frac{(x+3)^{n+1}}{4^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{4^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}4^n}{(x+3)^n4^{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^n(x+3)4^n}{(x+3)^n4^n4}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+3}{4}\right|=\left|\frac{x+3}{4}\right|=\frac{|x+3|}{4}<1$$

$$|x+3|<4\quad -4<x+3<4\text{, o sea } -7<x<1$$

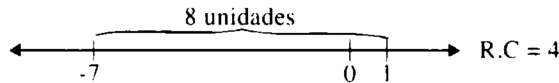
por lo tanto el intervalo es $(-7,1)$. Analizando los puntos extremos: Si $x=-7$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7+3)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

la cual diverge y el extremo $x=-7$ permanece abierto. Si $x=1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1^n$$

la cual también diverge en este extremo y por lo tanto, I.C=$(-7,1)$ y R.C= 4




5. Encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)e^{2n-1}}$.

***Solución***: Aplicando el criterio de la razón:

$$|a_n|=\frac{x^n}{(2n-1)e^{2n-1}}\quad,\quad |a_{n+1}|=\frac{x^{n+1}}{(2n+1)e^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(2n+1)e^{2n+1}}}{\frac{x^n}{(2n-1)e^{2n-1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(2n-1)e^{2n-1}}{x^n(2n+1)e^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n x(2n-1)e^{2n}e^{-1}}{x^n(2n+1)e^{2n}e^{1}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(2n-1)}{(2n+1)e^2}\right| = \frac{|x|}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| = \frac{|x|}{e^2}\cdot 1 = \frac{|x|}{e^2} < 1$$

$|x| < e^2$, entonces: $-e^2 < x < e^2$ , $(-e^2, e^2)$. Si $x = -e^2$, la sumatoria inicial se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-e^2)^n}{(2n-1)e^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n e^{2n}}{(2n-1)e^{2n}e^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}e}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{2n-1}$$

Utilizando el criterio de comparación por límites, tenemos que la serie alternada $\sum b_n$ es $\sum\frac{1}{n}$, serie hiperarmónica con $p = 1$ la cual diverge.

Tomando $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{ne}{2n-1} = e\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{e}{2} > 0$$

por lo tanto ambas series divergen. Si $x = e^2$ la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^2)^n}{(2n-1)e^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2n}}{(2n-1)e^{2n}e^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e}{2n-1}$$

la cual es una serie alternada y aplicando este criterio tenemos:

i) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{2n-1} = 0$

ii) $|a_n| = \frac{e}{2n-1}$ , $|a_{n+1}| = \frac{e}{2n+1}$

$$|a_{n+1}| < |a_n|$$

$\frac{e}{2n+1} < \frac{e}{2n-1}$, de donde:

$$e(2n-1) < e(2n+1)$$

Como se cumplen las dos condiciones para la convergencia de las series alternadas, converge y se cierra el intervalo en este punto.

Resumiendo:

$$\text{I.C} = \left(-e^2, e^2\right] \text{ , R.C} = e^2$$

*Ejercicios 3.1*

Determinar el intervalo y el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^{n+1}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} x^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!} x^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (2x-1)^n$

## 3.2 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POR MEDIO DE SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias son una herramienta muy útil en las matemáticas, ya que nos permiten representar algunas de las funciones más importantes por medio de una sumatoria y su comportamiento es similar al de un polinomio de la función que representa.

La representación de funciones por medio de series de potencias nos permite resolver algunos problemas relacionados con derivación o integración, bastantes complejos, en forma directa.

Dada una función $f$ definida por una sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

decimos que la serie de potencias representa a la función $f$ y si $c$ es un número que está en el intervalo de convergencia entonces $f(c)$ se puede hallar encontrando la suma de la serie.

Iniciemos el trabajo de encontrar la representación de una función por medio de una sumatoria como sigue:
Sea la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

donde su primer término es $a = 1$ y su razón de cambio $r$ *es* $x$. Aplicando el criterio de la razón analicemos su intervalo de convergencia:

$$|a_n| = x^n \qquad |a_{n+1}| = x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n x}{x^n} = \lim_{n\to\infty} x = x \ ; \quad |x| < 1$$

Converge absolutamente. De donde $-1 < x < 1$ por lo tanto el intervalo es $(-1,1)$

Analizando los puntos extremos, tenemos:

Si $x = 1$ la serie original queda como

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

la cual diverge. Si $x = -1$ la serie queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

la cual también diverge. Por lo tanto su intervalo de convergencia es el abierto $(-1,1)$.

Por otro lado sabemos que cuando una **serie geométrica converge**, sus suma es $s = a/(1-r)$. Igualando la función obtenida en la última expresión con la sumatoria, tenemos que la función se puede representar por la sumatoria:

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ en } (-1,1) \tag{1}$$

si en (1) sustituimos $x$ por $-x$ tenemos:

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \text{ en } (-1,1) \tag{2}$$

si en (1) sustituimos $x$ por $x^2$ tenemos:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n}\right) \text{ en } (-1,1) \tag{3}$$

si en (1) sustituimos $x$ por $\left(-x^2\right)$ tenemos:

$$\frac{1}{1-\left(-x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ en } (-1,1) \tag{4}$$

De esto último podemos observar que de una serie de potencias, podemos obtener otras, las cuales tienen el mismo intervalo de convergencia y así representar otras funciones con igual dominio.

**Teorema 3.2.1**

Si una función $f(x)$ se puede representar por medio de una sumatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

cuyo intervalo de convergencia es igual al dominio de la función, entonces:

a) La derivada de la función va a ser igual a la derivada de la sumatoria que la representa y su radio de convergencia será el mismo.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n$$

b) La integral de la función va a ser igual a la integral de la sumatoria que la representa y su radio de convergencia será el mismo

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$$

*Ejemplos 3.2*

6. Encontrar una representación en serie de potencias para la función:

$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

***Solución***: Sabemos que la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

la podemos representar por medio de la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

en $(-1,1)$. Si esta función la derivamos:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^{-1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$-(1+x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^{n-1}(-1)$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$$

Multiplicando por $-1$:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} nx^{n-1}$$

7. Encontrar una representación en serie de potencias de $\ln(1+2x)$ para $2x<1$.

***Solución***: Nosotros sabemos que:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ ..............................(1)}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \text{ ..............................(2)}$$

Si sustituimos $2x$ en vez de $x$ en (2) se tiene:

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$$

Integrando con $u=1+2x$ y $du=2dx$:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n(2t)^n dt$$

$$\frac{1}{2}\ln 1+2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\int_0^x(2t)^n(2dt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left.\frac{(2t)^{n+1}}{n+1}\right|_0^x$$

$$\ln 1+2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}-0\right]$$

$$\ln 1+2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$

8. Encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la función $f(x)$ así como de su primera derivada $f'(x)$; donde:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

***Solución***: Encontrar el intervalo y radio de convergencia de $f(x)$, utilizando el criterio de la razón:

$$|a_n| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} .$$

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underset{n\to\infty}{lím}\left|\frac{\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)^2}}{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}\right| = \underset{n\to\infty}{lím}\left|\frac{(n+1)^2 x^{n+2}}{(n+2)^2 x^{n+1}}\right|$$

$$= \underset{n\to\infty}{lím}\left|\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\frac{x^{n+1}x}{x^{n+1}}\right| = |x|\,\underset{n\to\infty}{lím}\left|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right| = |x| < 1$$

o sea $-1 < x < 1$, por lo tanto el intervalo es $(-1,1)$. Si $x = -1$, la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

la cual es una serie alternada. Utilizando el criterio de series alternadas, tenemos:

$$|a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+2)^2}$$

i) $\underset{n\to\infty}{lím}\, a_n = \underset{n\to\infty}{lím}\dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$

ii) $|a_{n+1}| < |a_n|$

$$\frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+i)^2}$$

$$(n+1)^2 < (n+2)^2$$

por lo tanto converge y en este extremo se cierra. Si $x = 1$ la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

Utilizando el criterio de comparación:

$$\sum a_n = \sum\frac{1}{(n+1)^2} \; ; \text{ y comparamos con } \sum b_n = \sum\frac{1}{n^2}$$

que es una serie hiperarmónica con $p = 2 > 1 \therefore$ converge. Comparando $a_n \le b_n$:

$$\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n^2}$$
$$n^2 \le (n+1)^2$$

lo cual se cumple. Por lo tanto converge y el intervalo se cierra en este extremo $[-1,1]$.

El intervalo de convergencia para $f(x)$ es $[-1,1]$. Además R.C = 1. Derivemos la función y encontremos su intervalo y su radio de convergencia.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

Ahora obtengamos el intervalo y el radio de convergencia de la nueva función utilizando el criterio de la razón:

$$|a_n| = \frac{x^n}{n+1} \quad , \quad |a_{n+1}| = \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)}{x^n(n+2)}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n x(n+1)}{x^n(n+2)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = |x| < 1$$

$-1 < x < 1$ de donde el intervalo es $(-1,1)$. Analizando sus puntos extremos tenemos:

Si $x = 1$ la serie derivada se convierte en

$$f'(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

comparándola con la serie armónica $\sum\frac{1}{n}$ con $p = 1$ que diverge:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ también diverge y permanece abierto este extremo del intervalo.

Si $x = -1$, tenemos:

$$f'(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

la cual es una serie alternada y aplicando este criterio, tenemos:

$$|a_n|=\frac{1}{n+1}\quad,\quad |a_{n+1}|=\frac{1}{n+2}$$

$$\text{i)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$$\text{ii)}\quad |a_{n+1}|<|a_n|$$

$$\frac{1}{n+2}\leq\frac{1}{n+1}\quad,\quad n+1\leq n+2$$

por lo tanto, la serie derivada converge en este extremo y su intervalo de convergencia es I.C.= $[-1,1)$ y su radio R.C.= 1

9. Encontrar el intervalo y el radio convergencia de la serie dada, así como de su primera derivada de la función:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

***Solución***: Aplicando el criterio de la razón:

$$|a_n|=\frac{x^n}{\sqrt{n}}\quad,\quad |a_{n+1}|=\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\sqrt{n}}{x^n\sqrt{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n x\sqrt{n}}{x^n\sqrt{n+1}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right|=|x|<1$$

de donde $-1<x<1$ y el intervalo es $(-1,1)$. Analizando sus puntos externos, tenemos: Si $x=-1$ la serie original nos queda como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

la cual es una serie alternada y aplicando este criterio, tenemos:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{ii) } |a_{n+1}| < |a_n|$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$$

lo cual se cumple, por lo tanto la serie converge y en este extremo se cierra el intervalo.

Si $x = 1$ nos queda la serie original como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

serie armónica con $p = 1/2$, que diverge, por lo tanto la serie tiene como intervalo de convergencia $[-1,1)$. Ahora derivemos la serie original dada:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad , \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^{n-1}$$

y aplicando el criterio de la razón:

$$|a_n| = \sqrt{n}x^{n-1} \quad , \quad |a_{n+1}| = \sqrt{n+1}x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sqrt{n+1}x^n}{\sqrt{n}x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt{\frac{n+1}{n}}\, x\right| = |x| \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right]^{1/2} = |x|$$

$|x| < 1$ entonces $-1 < x < 1$ y se tiene $(-1,1)$. Analizando los puntos extremos:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^{n-1}$$

Si $x = -1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^{n-1}$, la cual es una serie alternada y aplicando este criterio:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \to \infty \therefore \text{ diverge.}$$

Si $x = 1$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^{n-1}$ la cual diverge y su I.C = $(-1,1)$; y R.C = 1.

Observamos en este ejemplo que la serie original y en su primera derivada tienen igual radio de convergencia pero difieren en sus intervalos de convergencias, en sus puntos extremos.

10. Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n}=f(x)$$

encuentre el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie, así como de su primera derivada.

***Solución***: Aplicando el criterio de la razón, tenemos

$$|a_n|=\frac{(x-1)^n}{n3^n} \quad , \quad a_{n+1}=\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\ 3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{(x-1)^n}{n3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n-1}n3^n}{(x-1)^n(n+1)3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^n(x-1)n3^n}{(x-1)^n(n+1)3^n3}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)\ n}{(n+1)\ 3}\right|=\left|\frac{x-1}{3}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=\frac{|x-1|}{3}$$

$\frac{|x-1|}{3}<1$, $|x-1|<3$ de donde $-3<x-1<3$, $\quad -2<x<4$ o sea $(-2,4)$.

Analizando los puntos extremos, tenemos: Si $x=-2$ la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2-1)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

la cual es una serie alternada y aplicando este criterio tenemos

i) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

ii) $|a_{n+1}|<|a_n|$

$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ , $n<n+1$ se cumple

por lo tanto converge en este extremo. Si $x=4$, la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-1)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

la cual es una serie armónica con $p=1$ que diverge y su I.C es $[-2,4)$; así como su R.C es 3. Derivando la serie original, tenemos:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^{n-1}}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}$$

Aplicando el criterio de la razón:

$$|a_n|=\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}\quad,\quad |a_{n+1}|=\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}}{\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)^n 3^n}{(x-1)^n(x-1)^{-1}3^n 3}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-1}{3}=\frac{x-1}{3}$$

$\frac{|x-1|}{3}<1$; $|x-1|<3$ $\quad -3<x-1<3$ o sea $-2<x<4$ teniendo (-2,4).

Analizando sus puntos extremos: Si $x=-2$, la serie original queda, como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

Es una serie la cual diverge.

Si $x=4$ la serie original se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-1)^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3)^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n 3^{-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}$$

la cual converge. I.C de la derivada es $(-2,4]$ y su R.C es 3.

11. Encontrar el intervalo y el radio de convergencia de la siguiente serie, así como de su primera derivada

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)\,!}$$

***Solución***: Aplicando el criterio de la razón, tenemos:

$$a_n = \frac{x^{n-1}}{(2n-1)\ !}\ ,\quad a_{n+1} = \frac{x^n}{(2n+1)\ !}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^n}{(2n+1)\ !}}{\dfrac{x^{n-1}}{(2n-1)\ !}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n(2n-1)\ !}{x^n x^{-1}(2n+1)(2n)(2n-1)\ !}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(2n+1)(2n)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{4n^2+2n}\right| = |x|\cdot 0 = 0$$

por lo tanto converge para todos los valores de $x$ y su I.C = $\Re$ ó $(-\infty,+\infty)$; y su R.C = $+\infty$. Derivando la serie original tenemos:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)\ !}$$

aplicando el criterio de la razón tenemos:

$$a_n = \frac{(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)\ !}\ ,\quad a_{n+1} = \frac{nx^{n-1}}{(2n+1)\ !}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{nx^{n-1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx^{n-1}(2n-1)!}{(n-1)x^{n-2}(2n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx^{n-1}(2n-1)\ !}{(n-1)x^{n-1}x^{-1}(2n+1)(2n)(2n-1)\ !}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{(n-1)(2n+1)(2n)}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{4n^3-2n^2-2n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{12n^2-4n-2}\right| = |x|\cdot 0 = 0$$

por lo tanto converge para todo valor de $x$ y su I.C = $\Re$; y R.C = $+\infty$

12. Posteriormente demostraremos que la función $e^x$ se puede representar por medio de la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

***Solución***: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Ahora a partir de esta representación obtengamos la sumatoria que nos ayude a calcular $e^{-x}$. Esto lo logramos sustituyendo en la igualdad:

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

sustituyendo $-x$ en vez de $x$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n!}$$

obtengamos a partir de esto una integral que es bastante difícil de obtener por medio de las técnicas normales de integración y esta es:

$$\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt$$

Como sabemos que:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n}x^{n}}{n!}$$

sustituyamos $t^2$ en vez de $x$, tenemos:

$$e^{-t^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(t^{2})^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}t^{2n}}{n!}$$

integrando esta igualdad obtenemos:

$$\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt=\int_{0}^{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{t}\frac{t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left.\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right|_{0}^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

***Ejercicios 3.2***

**a)** Encuentre una representación en serie de potencias para $f(x)$ y especifique su radio y su intervalo de convergencia.

1. $f(x)=\dfrac{1}{1-4x}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^{4}}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$
4. $e^{2x}$
5. $f(x)=\dfrac{x}{1-3x}$
6. $f(x)=\dfrac{x^{2}}{1-x^{2}}$

**b**) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la función $f(x)$ así como de su primera derivada.

7. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!}$

8. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{n}}$

9. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 4^n}{5^n}$

10. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^n}{4^n}$

### *3.3 SERIES DE TAYLOR*

Analicemos ahora un tipo especial de series de potencias; partiendo de la serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

en donde $a_n$ es una función constante que depende de $n$ y converge en algún intervalo abierto $-r<x-a<r$ $(r>0)$.

La suma anterior tiene un valor para cada $x$ en este intervalo y por lo tanto define una función de $x$. Podemos escribir que:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_o+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots \qquad (1)$$

en el intervalo $a-r<x<a+r$; ahora nos dedicaremos a obtener la relación existente entre $a_o+a_1+a_2+a_3+\ldots a_n$ y la función $f$.

Considerando que el segundo término de la ecuación (1) es un polinomio y haciendo $x=a$ obtenemos de inmediato que $f(a)=a_0$. Derivando la ecuación (1) obtenemos:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3\ldots \qquad (2)$$

evaluando esta ecuación en $x=a$ tenemos $f'(a)=a_1$. Derivando ahora la ecuación (2) tenemos:

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-a)+4\cdot 3a_4(x-a)^2+5\cdot 4a_5(x-a)^3+\ldots \qquad (3)$$

evaluando esta segunda derivada en $x=a$ obtenemos:

$$f''(x)=2a_2 \quad \text{o bien} \quad a_2=\frac{f''(x)}{2!}$$

derivando la ecuación (3) tenemos:

$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-a)+5\cdot 4\cdot 3a_5(x-a)^2+6\cdot 5\cdot 4(x-a)^3+\ldots \qquad (4)$$

evaluando está última ecuación en $x=a$ tenemos:

$$f'''(a)=3\cdot 2a_3 \text{ o bien } a_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$

y así sucesivamente. Generalizando lo anterior, obtenemos:

$$a_n=\frac{f^n(a)}{n!}$$

sustituyendo esta expresión en la serie de potencias original obtenemos:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n\ldots.$$

(5)

esta serie es conocida como **SERIE DE TAYLOR** y nos sirve para representar a la función *f* alrededor del punto *a*.

Un caso particular de la serie de Taylor es aquel en que $a=0$ conocida como serie de **Mc LAURIN**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n\ldots. \qquad (6)$$

**Nota:** La condición necesaria para representar a una función en serie Taylor o de Mc Laurin es que la función sea *n* veces derivable.

***Ejemplos 3.3***

13. Aproximar a la función $f(x)=e^x$ mediante una serie de Mc Laurin.

***Solución*:** Al referirnos a la serie de Mc Laurin de inmediato observamos que estamos trabajando alrededor del punto $a=0$.

La función original es: $f(x)=e^x$ , $f^0(0)=e^0=1$

$f'(x)=e^x$.............$f'(0)=e^0=1$

$f''(x)=e^x$...........$f''(0)=e^0=1$

$f'''(x)=e^x$..........$f'''(0)=e^0=1$

sustituyendo estos valores en la ecuación (6) obtenemos:

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

de donde $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

14. Encontrar una aproximación a la función $f(x)=sen\,x$ mediante una serie de Mc Laurin.

***Solución*:**

$$f^0(x)=sen\,x\ldots\ldots\ldots\ldots f^0(0)=sen\,0=0$$
$$f'(x)=\cos x\ldots\ldots\ldots\ldots f'(0)=\cos 0=1$$
$$f''(x)=-sen\,x\ldots\ldots\ldots\ldots f''(0)=-sen\,0=0$$
$$f'''(x)=-\cos x\ldots\ldots\ldots\ldots f'''(0)=-\cos 0=-1$$
$$f^{IV}(x)=sen\,x\ldots\ldots\ldots\ldots f^{IV}(0)=sen\,0=0$$

sustituyendo valores de $f^n(0)$ en la ecuación (6), tenemos:

$$f(x)=sen\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)x^n}{n!}=\frac{0x^0}{0!}+\frac{1x^1}{1!}+\frac{0x^2}{2!}+\frac{(-1)x^3}{3!}+\frac{0x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\ldots$$

o bien:

$$f(x)=\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

o sea, tomando la sumatoria desde $n=0$, tenemos:

$$sen\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

o considerando la sumatoria desde $n=1$, tenemos:

$$sen\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

**Nota:** observamos que la representación de una función por medio de una sumatoria no es única.

15. Encontrar una representación de la función $f(x) = \cos x$ mediante una serie de Mc Laurin.

***Solución*:**

$$f^0(x) = \cos x \ldots\ldots\ldots\ldots f^0(0) = \cos 0 = 1$$
$$f'(x) = -\sin x \ldots\ldots\ldots\ldots f'(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \ldots\ldots\ldots\ldots f''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f'''(x) = \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots f'''(0) = \sin 0 = 0$$
$$f^{IV}(x) = \cos x \ldots\ldots\ldots\ldots f^{IV}(0) = \cos 0 = 1$$

sustituyendo estos valores de $f^n(0)$ en la ecuación (6), tenemos:

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!} = \frac{1x^0}{0!} + \frac{0x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{0x^3}{3!} + \frac{1x^4}{4!} + \frac{0x^5}{5!} - \frac{1x^6}{6!} + \ldots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

de donde $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ , o bien $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)\,!}$.

16. Aproximar a la función $f(x) = \ln x$ mediante una serie de Taylor alrededor de $a = 1$.

***Solución:***

$$f^0(x) = \ln x \ldots\ldots\ldots\ldots f^0(1) = \ln 1 = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots f'(1) = (1)^{-1} = 1 = 0!$$
$$f''(x) = -x^{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots f''(1) = -(1)^{-2} = -1 = -1!$$
$$f'''(x) = 2x^{-3} \ldots\ldots\ldots\ldots f'''(1) = 2(1)^{-3} = 2 = 2!$$
$$f^{IV}(x) = -6x^{-4} \ldots\ldots\ldots\ldots f^{IV}(1) = -6(1)^{-4} = -6 = -3!$$
$$f^{V}(x) = 24x^{-5} \ldots\ldots\ldots\ldots f^{V}(1) = 24(1)^{-5} = 24 = 4!$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$f(x) = \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n$$
$$= 0 + (x-1)^1 - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!} - \frac{3!(x-1)^4}{4!} + \ldots$$

$$f(x)=0+(x-1)^1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots$$

$$=0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}=0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

$$\ln x=0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

17. Encontrar una aproximación mediante una serie de Taylor de la función: $f(x)=sen\,x$ alrededor del punto:

$$a=\frac{\pi}{4}=45^o$$

***Solución:***

$$f^0(x)=sen\,x \dots\dots\dots f^0\left(\pi/4\right)=sen45^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x)=\cos x \dots\dots\dots f'\left(\pi/4\right)=\cos 45^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x)=-senx \dots\dots\dots f''\left(\pi/4\right)=-sen45^o=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x)=-\cos x \dots\dots\dots f'''\left(\pi/4\right)=-\cos 45^o=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f^{IV}(x)=senx \dots\dots\dots f^{IV}\left(\pi/4\right)=sen45^o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\therefore\ sen\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n\left(\pi/4\right)\left(x-\pi/4\right)^n}{n!}$$

$$=\frac{1/\sqrt{2}\left(x-\pi/4\right)^0}{0!}+\frac{1/\sqrt{2}\left(x-\pi/4\right)^1}{1!}-\frac{1/\sqrt{2}\left(x-\pi/4\right)^2}{2!}-\frac{1/\sqrt{2}\left(x-\pi/4\right)^3}{3!}$$

$$+\frac{1/\sqrt{2}\left(x-\pi/4\right)^4}{4!}+\frac{1/\sqrt{2}\left(x-\pi/4\right)^5}{5!}-\dots$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{0!}+\frac{\left(x-\pi/4\right)}{1!}-\frac{\left(x-\pi/4\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\pi/4\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\pi/4\right)^4}{4!}+\frac{\left(x-\pi/4\right)^5}{5!}-\dots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\left(x-\pi/4\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\pi/4\right)^4}{4!}-\dots\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x-\pi/4\right)^1}{1!}-\frac{\left(x-\pi/4\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\pi/4\right)^5}{5!}-\dots\right]$$

$$senx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(x-\pi/4\right)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(x-\pi/4\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]$$

18. Encontrar una representación en serie de Mc Laurin para la función: $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

***Solución***:

$$f^0(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} \ldots\ldots\ldots f^0(0) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 = 1!$$

$$f'(x) = -2(1+x)^{-3} \ldots\ldots\ldots f'(0) = -2 = -2!$$

$$f''(x) = 6(1+x)^{-4} \ldots\ldots\ldots f''(0) = 6 = 3!$$

$$f'''(x) = -24(1+x)^{-5} \ldots\ldots\ldots f'''(0) = -24 = -4!$$

$$f^{IV}(x) = 120(1+x)^{-6} \ldots\ldots\ldots f^{IV}(0) = 120 = 5!$$

Sustituyendo en la ecuación (6), se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)x^n}{n!} = \frac{1!x^0}{0!} - \frac{2!x^1}{1!} + \frac{3!x^2}{2!} - \frac{4!x^3}{3!} + \frac{5!x^4}{4!} - \ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x^1 + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)x^n$$

<u>*Ejercicios 3.3*</u>

**a**) Encuentre una representación en serie de Mc Laurin para las funciones:

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 2. $f(x) = \cos 4x$ 3. $f(x) = \ln(1+x)$

**b**) Encuentre una representación en serie de Taylor para las funciones indicadas, alrededor de los puntos señalados:

4. $f(x) = e^{-x}$; $a = 1$ 5. $f(x) = sen\ x$; $a = \pi/2$ 6. $f(x) = \cos 2x$; $a = \pi/4$

## *3.4 ALGUNAS DE LAS APLICACIONES DE LA SERIE DE TAYLOR*

19. Obtenga una representación en serie de Mc Laurin para la función $\cos x$ derivando la función $sen\ x$.

***Solución***: Sabemos que:

$$sen\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{d}{dx} sen\ x = \cos x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)\ !}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)(x)^{2n}}{(2n+1)(2n)\ !}$$

$$\therefore \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\ !}.$$

20. Encuentre una representación en serie de Mc Laurin para la función $sen^2 x$.

***Solución***: Sabemos que por medio de una identidad trigonométrica podemos escribir:

$$sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

y a partir de este representación podemos escribir:

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)\ !}$$

$$\therefore \quad sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)\ !}$$

21. Existen algunas integrales muy difíciles de resolver (o imposibles) por medio de las técnicas de integración, como es el caso de la integral definida:

$$\int_0^1 \frac{sen\ x}{x} dx$$

Resuélvase por medio de series.

***Solución***: Sabemos que una representación en serie de Mc Laurin de la función $sen\ x$ es:

$$sen\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)\ !}$$

dividiendo entre $x$, se tiene:

$$\frac{sen\ x}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)\ !}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x)^{2n+1}}{x(2n+1)\ !} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x)^{2n}}{(2n+1)\ !}$$

integrando:

$$\int_0^1 \frac{sen\ x}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x)^{2n}}{(2n+1)\ !}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x)^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)\ !}\Bigg|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{sen\ x}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)\ !} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)\ !}$$

22. Por medio de series, calcule el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$.

***Solución***: Sabemos que $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\ !}$. Sustituyendo la representación del coseno en este límite, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\cdots\right]-1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3(2)!}+\frac{x^2}{3(4)!}-\frac{x^4}{3(6)!}+\frac{x^6}{3(8)!}-\cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{3(2)!} = -\frac{1}{6}$$

***<u>Ejercicios 3.4</u>***

Utilizando series de Taylor evalúe los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2 - 1}{x^4}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$ 3. $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x^2 - x^2}{x^6}$

# CAPÍTULO IV

# TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

## *4.1 ANTIDIFERENCIACIÓN*

Como se ha visto anteriormente, a partir de una función es posible obtener la derivada de esta función. En esta sección se tratará el problema inverso: a partir de la derivada se buscará obtener la función que le dio origen.

Al proceso inverso de la diferenciación se le conoce como **Antidiferenciación.** A continuación se define este concepto:

**Definición**

Se dice que una función $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de una función $f(x)$ si se cumple que $F'(x) = f(x)$ para todos los valores de $x$ definidos en un intervalo cerrado $[a,b]$.

Por otro lado, es posible demostrar, en términos generales, que la antiderivada o primitiva de una función no es única. Esto es, si $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, y si $G(x)$ es una función definida por:

$$G(x) = F(x) + c$$

donde $c$ es una constante arbitraria, se tiene que:

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

Por lo tanto, se concluye que también $G(x)$ es una antiderivada o primitiva de $f(x)$ para todos los valores de $x$ definidos en $[a,b]$.

*__Ejercicios 4.1__*

Comprobar, en cada caso, que las funciones $F(x)$ son antiderivadas o primitivas de $f(x)$.

1. $F(x) = 5x^2 - 3x + 2$ ; $f(x) = 10x - 3$.

2. $F(x)=-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2x+3$ ; $f(x)=-7x^2+5x-2$

3. $F(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+6$ ; $f(x)=-\frac{1}{x^{3/2}}+\frac{1}{2\;x}$

4. $F(x)=2\cos x+3sen\,x$ ; $f(x)=-2senx+3\cos x$

5. $F(x)=3e^{-2x}+\ln x-6$ ; $f(x)=-6e^{-2x}+\frac{1}{x}$

6. $F(x)=xe^{3x}-5\ln(3x)$ ; $f(x)=e^{3x}(3x+1)-\frac{5}{x}$

**Definición**
Si $F(x)$ es una autoderivada o primitiva de $f(x)$, esto es, si $F'(x)=f(x)$, se puede escribir esta igualdad como:

$$dF(x)=f(x)dx$$

A la operación de la antiderivada de una función se le denota por el símbolo $\int$.

**Definición**
A la antiderivada de una función $f(x)$ se le representa como:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

donde $F'(x)=f(x)$.

A esta representación se le llama **Integral indefinida de** $f(x)$, donde $c$ es una constante arbitraria. A $f(x)$ se le llama integrando y $x$ es la variable de integración.

A partir de las fórmulas de diferenciación, se obtienen las llamadas fórmulas de antiderivación. Estas fórmulas son más conocidas como **Integrales indefinidas inmediatas**.

## *4.2 INTEGRACIÓN INMEDIATA*

Fórmulas elementales de integración

I. $\int\frac{d}{dx}(f(x))dx=f(x)+c$ , $c=cte$

II. $\int(u+v-w)dx=\int udx+\int vdx-\int wdx$

III. $\int k\,du = k\int u\,du \qquad ; \qquad k = cte.$

IV. $\int x^n dx = \int \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad ; \qquad n \neq -1$

***Ejemplos 4.2***

7. $\int dx = x + c$

8. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

9. $\int (x^6 + x^4 - x^2)dx = \int x^6 dx + \int x^4 dx - \int x^2 dx$

$$= \frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + c$$

10. $\int x^{-6} dx = \frac{x^{-5}}{-5} + c = -\frac{1}{5x^5} + c$

11. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/3}} = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}x^{2/3} + c$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \int \frac{dx}{x^{4/3}} = \int x^{-4/3} dx = \frac{x^{-1/3}}{-\frac{1}{3}} + c = -\frac{3}{x^{1/3}} + c$

14. $\int (x^2 + 1)(x^2 - 1)dx = \int (x^4 - 1)dx$

$$= \int x^4 dx - \int dx = \frac{x^5}{5} - x + c$$

15. $\int \frac{(x+1)^2}{x^{1/2}} dx = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^{1/2}} dx$

$$= \int \frac{x^2}{x^{1/2}} dx + 2\int \frac{x}{x^{1/2}} dx + \int \frac{dx}{x^{1/2}}$$

$$= \int x^{3/2} dx + 2\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx$$

$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{2x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$$

16. $\int \frac{x^4 + x^2}{x^2} dx = \int \frac{x^4}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx = \int x^2 dx + \int dx$

$$= \frac{x^3}{3} + x + c$$

17. $\int (x+3)^2 dx$

Existen dos formas de resolver esta integral:

a) Una es desarrollando el binomio al cuadrado:

$$\int (x+3)^2 dx = \int (x^2+6x+9)dx = \int x^2 dx + 6\int x dx + 9\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x + c = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + c$$

b) La otra es aplicando la fórmula:

$$\text{V.} \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \ , \ n \neq -1 .$$

Haciendo: $u = x+3$ y $du = dx$ :

$$\int (x+3)^2 dx = \frac{(x+3)^3}{3} + c$$

18. $\int (x^2+4)^2 x dx$

Haciendo $u = x^2+4$ y $du = 2xdx$ y completando la integral, tenemos:

$$\int (x^2+4)^2 x dx = \frac{1}{2}\int (x^2+4)^2 (2xdx)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+4)^3}{3} + c = \frac{(x^2+4)^3}{6} + c$$

19. $\int \frac{x}{(2x^2-1)^2} dx = \int (2x^2-1)^{-2} x dx = I$

Haciendo $u = 2x^2-1$ y $du = 4xdx$ y completando la integral, tenemos:

$$I = \frac{1}{4}\int (2x^2-1)^{-2}(4xdx) = \frac{\frac{1}{4}(2x^2-1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{4(2x^2-1)} + c$$

20. $\int \frac{4x+4}{(2x^2+4x)^{1/3}} dx = \int (2x^2+4x)^{-1/3}(4x+4)dx = I$

Haciendo $u = 2x^2+4x$ y $du = (4x+4)dx$ ,

$$I = \frac{(2x^2+4x)^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2}(2x^2+4x)^{2/3} + c$$

21. $\int \frac{x+1}{(2x^2+4x)^{2/3}}\,dx = \int (2x^2+4x)^{-2/3}(x+1)dx$

Haciendo $u = 2x^2+4x$ y $du = (4x+4)dx = 4(x+1)dx = I$ y completando la integral, tenemos:

$$I = \frac{1}{4}\int (2x^2+4x)^{-2/3}4(x+1)dx = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+4x)^{1/3}}{1/3} + c$$

$$= \frac{3}{4}(2x^2+4x)^{1/3} + c$$

22. $\int x^2\sqrt{6-x^3}\,dx = \int (6-x^3)^{1/2}x^2dx = I$

Haciendo $u = 6-x^3$ y $du = -3x^2dx$ y completando la integral, tenemos:

$$I = -\frac{1}{3}\int (6-x^3)^{1/2}(-3x^2dx) = -\frac{1}{3}\frac{(6-x^3)^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= -\frac{2}{9}(6-x^3)^{3/2} + c$$

**VI.** $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$

23. $\int \frac{dx}{x} = I$

Haciendo $u = x$ y $du = dx$

$$I = \ln x + c$$

24. $\int \frac{dx}{2x-3} = I$

Haciendo $u = 2x-3$ y $du = 2dx$ y completando la integral, tenemos:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln 2x-3 + c$$

25. $\int \frac{2x}{4-4x^2}\,dx = I$

Haciendo $u = 4-4x^2$ y $du = -8xdx$ y completando la integral, tenemos:

$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{-8xdx}{4-4x^2} = -\frac{1}{4}\ln 4-4x^2 + c$$

26. $\int \frac{4x-9}{4x-5}dx = \int \frac{(4x-5)-4}{4x-5}dx = \int dx - \int \frac{4dx}{4x-5} = I$
En la segunda integral $u = 4x-5$ y $du = 4dx$,

$$I = x - \ln 4x-5 + c$$

**VII.** $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$, donde $\begin{cases} a & \text{es una constante.} \\ a > 0 & \text{o} \quad a \neq 1 \end{cases}$

27. $\int 5^{4x} dx = I$
$a = 5$, $u = 4x$ y $du = 4dx$,

$$I = \frac{1}{4}\int 5^{4x}(4dx) = \frac{1}{4}\frac{5^{4x}}{\ln 5} + c$$

**VIII.** $\int e^u du = e^u + c$

28. $\int e^x dx = I$
Si $u = x$ y $du = dx$,

$$I = e^x + c$$

29. $\int e^{-x} dx = I$
Si $u = -x$ y $du = -dx$,

$$I = -\int e^{-x}(-dx) = -e^{-x} + c$$

30. $\int e^{-3x} dx = I$
Si $u = -3x$ y $du = -3dx$,

$$I = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}(-3dx) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$$

31. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = I$

Haciendo $u = \frac{1}{x} = x^{-1}$ y $du = -x^{-2}dx = -\frac{dx}{x^2}$,

$$I = -\int e^{1/x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = -e^{1/x} + c$$

32. $\int (e^{5x}+3)^3 e^{5x}dx = I$

Haciendo $u = e^{5x}+3$ y $du = 5e^{5x}dx$,

$$I = \frac{1}{5}\int (e^{5x}+3)^3(5e^{5x}dx) = \frac{1}{5}\cdot\frac{(e^{5x}+3)^4}{4}+c = \frac{(e^{5x}+3)^4}{20}+c$$

33. $\int \frac{dx}{e^x+1} = I$

Multiplicando y dividiendo por $e^{-x}$, tenemos:

$$I = \int \frac{dx}{e^x+1}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} =$$

Haciendo $u = 1+e^{-x}$ y $du = -e^{-x}dx$

$$I = -\int \frac{-e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln\left|1+e^{-x}\right|+c$$

**IX.** $\int sen\, u\, du = -\cos u + c$

**X.** $\int \cos u\, du = sen\, u + c$

**XI.** $\int \tan u\, du = \ln \sec u + c$

**XII.** $\int \cot u\, du = \ln sen\, u + c$

**XIII.** $\int \sec u\, du = \ln \sec u + \tan u + c$

**XIV.** $\int \csc u\, du = \ln \csc u - \cot u + c$

**XV.** $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$

**XVI.** $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$

**XVII.** $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + c$

**XVIII.** $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + c$

34. $\int sen\,5x\,dx = I$

Haciendo $u = 5x$ y $du = 5dx$

$$I = \frac{1}{5}\int sen5x\,(5dx) = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$$

35. $\int \cos 8x\,dx = I$

Haciendo $u = 8x$ y $du = 8dx$

$$I = \frac{1}{8}\int \cos 8x\,(8dx) = \frac{1}{8}\,sen8x + c$$

36. $\int sen^4 x \cos x\,dx = I$

Haciendo $u = sen\,x$ y $du = \cos x\,dx$

$$I = \int sen^4 x\,(\cos x\,dx) = \frac{sen^5 x}{5} + c$$

37. $\int x \tan 3x^2 dx = I$

Haciendo $u = 3x^2$ y $du = 6x\,dx$

$$I = \frac{1}{6}\int \tan 3x^2\,(6x\,dx) = \frac{1}{6}\ln \sec 3x^2 + c$$

38. $\int e^{2x} \cot e^{2x} dx = I$

Haciendo $u = e^{2x}$ y $du = 2e^{2x}dx$,

$$I = \frac{1}{2}\int \cot e^{2x}\left(2e^{2x}dx\right) = \frac{1}{2}\ln sen\,e^{2x} + c$$

39. $\int \left(1-\cos^2 x\right)^{1/2} senx \cos x dx = I$

Haciendo $u = 1-\cos^2 x$ y $du = -2\cos x\left(-sen\,x\right)dx = 2sen\,x\cos x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \left(1-\cos^2 x\right)^{1/2}\left(2sen\,x\cos x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(1-\cos^2 x\right)^{3/2} + c$$

40. $\int \frac{\tan x + \cot x}{\tan x} dx$

$$\int \frac{\tan x + \cot x}{\tan x} dx = \int \frac{\tan x}{\tan x} dx + \int \frac{\cot x}{\tan x} dx = \int dx + \int \frac{\frac{\cos x}{sen\, x}}{\frac{sen\, x}{\cos x}} dx$$

$$= \int dx + \int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} dx = \int dx + \int \frac{1 - sen^2 x}{sen^2 x} dx$$

$$= \int dx + \int \frac{dx}{sen^2 x} - \int \frac{sen^2 x}{sen^2 x} dx$$

$$= \int dx + \int \csc^2 x dx - \int dx = -\cot x + c$$

41. $\int \frac{3 sen\, x}{\cos^3 x} dx = I$

Haciendo $u = \cos x$ y $du = -sen\, x\, dx$,

$$I = -3 \int \frac{-sen\, x\, dx}{\cos^3 x} = -3 \int \cos^{-3} x (-sen\, x\, dx)$$

$$= \frac{-3\cos^{-2} x}{-2} + c = \frac{3}{2\cos^2 x} + c$$

42. $\int e^{\tan x^2} x \sec^2 x^2 dx = I$

Haciendo $u = \tan x^2$ y $du = \sec^2 x^2 (2x dx)$,

$$I = \frac{1}{2} \int e^{\tan x^2} (\sec x^2)(2x dx) = \frac{1}{2} e^{\tan x^2} + c$$

43. $\int \frac{x \cos x^2}{sen\, x^2} dx = I$

Haciendo $u = sen\, x^2$ y $du = \cos x^2 (2x dx)$,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x^2 (2x dx)}{sen\, x^2} = \frac{1}{2} \ln sen\, x^2 + c$$

44. $I = \int \frac{dx}{\cot x - \csc x} = \int \frac{dx}{\frac{\cos x}{sen\, x} - \frac{1}{sen\, x}} = I$

Usando un denominador común:

$$I = \int \frac{dx}{\frac{\cos x - 1}{sen\ x}} = \int \frac{sen\ x\ dx}{\cos x - 1} = I$$

Haciendo $u = \cos x - 1$ y $du = -sen\ x\ dx$,

$$I = -\int \frac{-\ sen\ x\ dx}{\cos x - 1} = -\ln \cos x - 1 + c$$

45. $\int \csc^2 5x^2 (xdx) = I$

Haciendo $u = 5x^2$ y $du = 10xdx$,

$$I = \frac{1}{10} \int \csc^2 5x^2 (10xdx) = -\frac{1}{10} \cot 5x^2 + c$$

46. $\int e^{sen \ln x} \cos \ln x \left(\frac{1}{x}\right) dx = I$

Haciendo $u = sen \ln x$ y $du = \cos \ln x \left(\frac{1}{x}\right) dx$,

$$I = e^{sen \ln x} + c$$

47. $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx = I$

Haciendo $u = 1 + \tan x$ y $du = \sec^2 x dx$,

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|1 + \tan x| + c$$

**XIX.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ sen \frac{u}{a} + c$

**XX.** $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arc \tan \frac{u}{a} + c$

**XXI.** $\int \frac{du}{u \quad u^2 - a^2} = \frac{1}{a} arc \sec \frac{u}{a} + c$

**XXII.** $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + c$

**XXIII.** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$

**XXIV.** $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + c$

**XXIV.** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$

**XXV.** $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}a^2 arc\ sen\frac{u}{a} + c$

**XXVI.** $\int \sqrt{u^2 + a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$

**XXVII.** $\int \sqrt{u^2 - a^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = I$

Haciendo $a^2 = 4 \quad u^2 = x^2$ , $a = 2 \quad u = x$ y $du = dx$,

$$I = arc\ sen\frac{x}{2} + c$$

49. $\int \frac{dx}{9 + x^2} = I$

Haciendo $a = 3$, $a^2 = 9$; $u = x$, $u^2 = x^2$, $du = dx$,

$$I = \frac{1}{3} arc\tan\frac{x}{3} + c$$

50. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}} = I$

Haciendo $a = 4$, $a^2 = 16$; $u = x$, $u^2 = x^2$, $du = dx$,

$$I = \frac{1}{4} arc\sec\frac{x}{4} + c$$

51. $\int \frac{xdx}{x^4 - 9} = I$

Haciendo $a = 3$, $a^2 = 9$; $u = x^2$, $u^2 = x^4$, $du = 2xdx$, y completando la integral:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^4 - 9} = \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right| + c = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right| + c$$

52. $\int \frac{x^3dx}{x^8 + 4} = \int \frac{x^3dx}{\left(x^4\right)^2 + 4} = I$

Haciendo $a = 2$, $a^2 = 4$; $u = x^4$, $u^2 = \left(x^4\right)^2$, $du = 4x^3dx$ ,y completando la integral:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3dx}{x^8+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{2}arc\tan\frac{x^4}{2}+c=\frac{1}{8}arc\tan\frac{x^4}{2}+c$$

53. $\int\frac{14x^7dx}{x^{16}-16}=\int\frac{14x^7dx}{\left(x^8\right)^2-16}=I$

Haciendo $a=4$, $a^2=16$; $u=x^8$, $u^2=\left(x^8\right)^2$, $du=8x^7dx$, y completando la integral:

$$I=\frac{14}{8}\int\frac{8x^7dx}{x^{16}-16}=\frac{14}{8}\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^8-4}{x^8+4}\right|+c$$
$$=\frac{14}{64}\ln\left|\frac{x^8-4}{x^8+4}\right|+c$$

54. $\int\frac{x^2dx}{9-x^6}=I$

Haciendo $a=3$, $a^2=9$; $u=x^3$, $u^2=\left(x^3\right)^2$, $du=3x^2dx$, y completando la integral:

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{9-x^6}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)\ln\left|\frac{3+x^3}{3-x^3}\right|+c=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3+x^3}{3-x^3}\right|+c$$

55. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=I$

Aplicando la fórmula $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$, tenemos: $a=3$, $a^2=9$; $u=x$, $u^2=x^2$, $du=dx$

$$I=\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+c$$

56. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}=I$

Aplicando la fórmula $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$ tenemos: $a=4$, $a^2=16$; $u=x^2$, $u^2=x^4$, $du=2xdx$, y completando la integral:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^4+16}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+16}\right|+c$$

57. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=I$

Usando la fórmula $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$ tenemos: $a=2$, $a^2=4$; $u=x$, $u^2=x^2$, $du=dx$

$$I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + c$$

58. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6 - 9}} = I$

Usando la fórmula $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$ tenemos: $a^2 = 9$, $a = 3$, $u^2 = x^6$, $u = x^3$, $du = 3x^2dx$ y completamos la integral:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{x^6 - 9}} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + \sqrt{x^6 - 9}\right| + c$$

59. $\int \sqrt{4 - x^2}dx = I$

Aplicando la fórmula $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du$ tenemos: $a^2 = 4$, $a = 2$, $u^2 = x^2$, $u = x$, $du = dx$,

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{2}(4)arc\ sen\frac{x}{2} + c$$
$$= \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + 2arc\ sen\frac{x}{2} + c$$

60. $\int \sqrt{16 - x^8}\,x^3dx = I$

Usando la fórmula $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du$ tenemos: $a^2 = 16$, $a = 4$, $u^2 = x^8$, $u = x^4$, $du = 4x^3dx$, y completando la integral:

$$I = \frac{1}{4}\int \sqrt{16 - x^8}\,4x^3dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^4\sqrt{16 - x^8} + \frac{1}{2}\left(16\,arc\ sen\frac{x^4}{4}\right)\right) + c$$
$$= \frac{1}{8}x^4\sqrt{16 - x^8} + 2\,arc\ sen\frac{x^4}{4} + c$$

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x + 4)^2}} = I$

Usando la fórmula $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ tenemos:

$a^2 = 16$, $a = 4$, $u^2 = (x + 4)^2$, $u = x + 4$, $du = dx$

$$I = arc\ sen\frac{x + 4}{4} + c$$

62. $\int \frac{senx}{16+4\cos^2 x}dx$

Aplicando la fórmula $\int \frac{du}{a^2+u^2}$ tenemos:

$a^2=16,\ a=4,\ u^2=4\cos^2 x,\ u=2\cos x,\ du=-2\text{sen}\, xdx,$ completando la integral:

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{-2senx\ dx}{16+4\cos^2 x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)arc\ \tan\frac{2\cos x}{4}+c$$
$$=-\frac{1}{8}arc\ \tan\frac{2\cos x}{4}+c$$

63. $\int x\sqrt{9-(16+x^2)^2}dx=I$

Aplicando la fórmula $\int\sqrt{a^2-u^2}du$ tenemos:

$a^2=9,\ a=3,\ u^2=(16+x^2)^2,\ u=16+x^2,\ du=2xdx,$ y completando la integral:

$$I=\frac{1}{2}\int\sqrt{9-(16+x^2)^2}(2xdx)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)(16+x^2)\sqrt{9-(16+x^2)^2}+\frac{1}{2}(9)arcsen\frac{16+x^2}{3}\right)+c$$
$$=\frac{1}{4}(16+x^2)\sqrt{9-(16+x^2)^2}-\frac{9}{4}arcsen\frac{16+x^2}{3}+c$$

64. $\int\frac{dx}{\sqrt{16+(3+x)^2}}=I$

Usando la fórmula $\int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ tenemos:

$a^2=16,\ a=4,\ u^2=(3+x)^2,\ u=(3+x),\ du=dx$

$$I=\ln\left|(3+x)+\sqrt{16+(3+x)^2}\right|+c$$

65. $\int\frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}}=I$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$6x+x^2=x^2+6x=(x+3)^2-9=x^2+6x+9-9$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-9}}$$

Haciendo $a^2 = 9$, $a = 3$, $u^2 = (x+3)^2$, $u = (x+3)$, $du = dx$,

$$I = \ln\left|(x+3) + \sqrt{(x+3)^2 - 9}\right| + c$$

66. $\int \frac{dx}{x^2 + 16x + 20} = I$

Transformando el denominador por un binomio al cuadrado, tenemos:

$$x^2 + 16x + 20 = x^2 + 16x + 64 - 44 = (x+8)^2 - 44$$

$$I = \int \frac{dx}{(x+8)^2 - 44}$$

donde: $a^2 = 44$, $a = \quad 44$, $u^2 = (x+8)^2$, $u = (x+8)$, $du = dx$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{44}} \ln\left|\frac{(x+8) - \sqrt{44}}{(x+8) + \sqrt{44}}\right| + c$$

67. $\int \frac{x+3}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} dx = I$

Si $u = 5 - 4x - x^2 = -x^2 - 4x + 5$, $du = (-2x - 4)dx = -2(x+2)dx$,
multiplicando y dividiendo por (-2), tenemos:

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{-2(x+3)dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x-6)dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$$
$$= -\frac{1}{2} \int \frac{((-2x-4) - 2)dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$$

Separando en dos integrales:

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x-4)dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{-2dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$$
$$= -\frac{1}{2} \int (5 - 4x - x^2)^{-1/2} (-2x-4)dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x^2 + 4x)}}$$

La primera integral es de la forma $\int u^n du$ y la segunda integral la completamos, en el denominador, a un binomio al cuadrado:

$$5-\left(x^2+4x\right)=5-(x+2)^2+4=5-\left(x^2+4x+4\right)+4=9-(x+2)^2$$

de donde:

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(5-4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x-4)dx+\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

En la segunda integral tenemos: $a^2=9,\ a=3,\ u^2=(x+2)^2,\ u=x+2,\ du=dx$

$$I=-\frac{1}{2}\frac{\left(5-4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+arcsen\frac{x+2}{3}+c=-\sqrt{5-4x-x^2}+arcsen\frac{x+2}{3}+c$$

68. $\int\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}=I$

Si $u=x^2+2x-3$ y $du=(2x+2)dx$,

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}=\frac{1}{2}\int\frac{((2x+2)+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2+2x-3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)dx+\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

En la segunda integral: $x^2+2x-3=\left(x^2+2x+1\right)-1-3=(x+1)^2-4$

$$I=\frac{1}{2}\int\left(x^2+2x-3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)dx+\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$$
$$=\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{2}}+\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$$

***Ejercicios 4.2***

Resolver las siguientes integrales.

1. $\int x^2dx$
2. $\int x^{-6}dx$
3. $\int\frac{dx}{x^5}$
4. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $\int(2x+4)^2dx$
6. $\int\frac{dx}{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}$
7. $\int\frac{(x+1)(x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$
8. $\int\left(\sqrt{(x+40)}\right)^3dx$
9. $\int\sqrt[6]{x^5+3}\,x^4\left(5x^4+12x^3\right)dx$

10. $\int (2x^2+4)x\,dx$

11. $\int (4x^6+2)x^5dx$

12. $\int \frac{dx}{(5x+2)^{1/4}}$

13. $\int \frac{x^2dx}{(4x^3-8)^{1/8}}$

14. $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$

15. $\int (x^3+x^2)^2 dx$

16. $\int (x+5)(x^4+2)dx$

17. $\int (x^3+3x)(x^2+1)dx$

18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{6x^2+4}}$

19. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$

20. $\int \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})^2}{\sqrt{5x}}dx$

21. $\int \frac{5x+4}{5x+3}dx$

22. $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$

23. $\int \frac{x^2-x-20}{x+4}$

24. $\int \sqrt{r+sx}\,dx$

25. $\int \frac{dx}{2x+4}$

26. $\int \frac{x^6}{x^7-5}dx$

27. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+4}dx$

28. $\int e^{2x}dx$

29. $\int e^{x^2+4}xdx$

30. $\int e^{x^2+3x}(x+\frac{3}{2})dx$

31. $\int (e^{2x}-5)^2 e^{2x}dx$

32. $\int \frac{dx}{(e^{3x}+2)e^{-3x}}$

33. $\int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^{1/2})}$

34. $\int \frac{dx}{x+x^{1/4}}$

35. $\int sen\,xdx$

36. $\int \cos\frac{5}{2}xdx$

37. $\int \tan\frac{1}{2}xdx$

38. $\int \cot\frac{7}{4}xdx$

39. $\int \sec 2x \tan 2xdx$

40. $\int \csc\frac{2}{3}x\cot\frac{2}{3}xdx$

41. $\int \sec^2 3xdx$

42. $\int \csc^2\frac{2}{3}xdx$

43. $\int x^3\sec^2 x^4dx$

44. $\int \frac{\csc^2 x^{1/2}}{x^{1/2}}dx$

45. $\int \frac{dx}{\cos 2x}$

46. $\int sen^2 3x\cos 3xdx$

47. $\int \tan^3\frac{1}{5}x\sec^2\frac{1}{5}xdx$

48. $\int \frac{\cot 2x}{sen^2 2x}dx$

49. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

50. $\int \frac{\sec^3 x}{\csc x}dx$

51. $\int e^{\cot\frac{1}{2}x}\csc^2\frac{1}{2}xdx$

52. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

53. $\int \frac{dx}{4+x^2}$

54. $\int \frac{dx}{4+(x+1)^2}$

55. $\int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^4-16}}$

56. $\int \frac{x^2dx}{2x^6-25}$

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}}$

58. $\int \sqrt{16-x^8}\,x^3dx$

59. $\int \frac{\sqrt{16+x^8}}{x^{-3}}dx$

60. $\int \sqrt{x^{10}-36x^4}(10x^9-144x^3)dx$

61. $\int \frac{(2x+1)}{x^2+4x+5}dx$

62. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{9x-x^2}}$

## 4.3 INTEGRACIÓN POR PARTES

En muchas ocasiones no es posible resolver una integral por medio de las fórmulas elementales de integración, y entonces es necesario recurrir a algunos métodos de solución.

Nos avocaremos primero al método de *Integración por partes* (el cual es muy aplicable en la integración de un producto), éste consiste en separar la integral en dos partes, una se iguala a $u$ y la otra a $dv$.

La deducción de la fórmula de integración por partes la podemos obtener a partir de la diferencial de un producto, de la siguiente forma:

$$d(uv) = udv + vdu \qquad (1)$$

despejando en (1) a $udv$, tenemos:

$$udv = d(uv) - vdu$$

Integrando esta identidad:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

lo que nos lleva a:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

que es la fórmula utilizada en la integración por partes.

Este método de integración tienen algunas limitantes como:

a) La nueva integral $\int vdu$ debe ser más sencilla que la primera integral $\int udv$

b) La nueva integral debe ser fácilmente integrable.

***Ejemplos 4.3***

69. $\int xe^x dx = I$

***Solución***: Haciendo $u = x$ y $dv = e^x dx$, y diferenciando $u$ e integrando $dv$, se tiene: $du = dx$ y $v = e^x$. Aplicando la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

70. $\int x\cos x dx = I$

***Solución***: Haciendo $u = x$, $du = dx$ ; $v = \operatorname{sen} x$, $dv = \cos x dx$. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$I = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + \cos x + c$$

71. $\int x \ln x dx = I$

***Solución***: $u = x$, $du = dx$; $v = ?$, $dv = \ln dx$. Hasta el momento no tenemos la fórmula de integración del ln $x$ por lo que la consideración inicial fue incorrecta, tomemos entonces a $u$ y $dv$ de la siguiente manera:

Si $u = \ln x, du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^2}{2}, dv = xdx$,

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

Como no tenemos la fórmula inmediata de $\int \ln x dx$, por medio de la integración por partes, la podemos obtener.

72. $\int \ln x dx = I$

***Solución***: Haciendo $u = \ln x$ $dv = dx$, $du = \frac{dx}{x}$ $v = x$

$$I = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

73. $\int x^2\sqrt{1+2x}dx$

***Solución***: $\int x^2(1+2x)^{1/2}dx = I$. Haciendo $u = x^2$, $dv = (1+2x)^{1/2}dx$,

$du = 2xdx$ $\quad v = \frac{1}{2}\frac{(1+2x)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3}(1+2x)^{3/2}$

$$I = \frac{1}{3}x^2(1+2x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int x(1+2x)^{3/2}dx$$

Observamos que la nueva integral no tiene solución inmediata. Sin embargo, es más fácil de resolver que la inicial. Esta nueva integral la resolvemos utilizando de nuevo la técnica de integración por partes.

Haciendo en la nueva integral $u = x \quad dv = (1+2x)^{3/2}dx$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{2}\frac{(1+2x)^{5/2}}{5/2} = \frac{1}{5}(1+2x)^{5/2}$$

$$I = \frac{1}{3}x^2(1+2x)^{3/2} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{5}x(1+2x)^{5/2} - \frac{1}{5}\int(1+2x)^{5/2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}x^2(1+2x)^{3/2} - \frac{2}{15}x(1+2x)^{5/2} + \frac{2}{15}\int(1+2x)^{5/2}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2(1+2x)^{3/2} - \frac{2}{15}x(1+2x)^{5/2} + \frac{2}{15}\frac{1}{2}\frac{(1+2x)^{7/2}}{7/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}x^2(1+2x)^{3/2} - \frac{2}{15}x(1+2x)^{5/2} + \frac{2}{105}(1+2x)^{7/2} + c$$

74. $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$

***Solución***: $\int x^{-4}\ln x dx = I$. Haciendo $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$ ; $v = -\frac{1}{3x^3}$ , $dv = x^{-4}dx$

$$I = -\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x^3}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\int x^{-4}dx$$

$$= -\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + c$$

75. $\int x^3 e^{x^2}dx$

***Solución***: $\int x^3 e^{x^2} x dx = I$. Haciendo $u = x^2$, $du = 2xdx$ ; $v = \frac{1}{2}e^{x^2}$ ,

$dv = e^{x^2}xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2xdx)$,

$$I = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

76. $\int \sec^3 dx$

***Solución***: $\int \sec^2 x \sec x dx = I$. Haciendo:

$u = \sec x$, $du = \sec x \tan x dx$ ; $v = \tan x$, $dv = \sec^2 x dx$

$$I = \sec x \tan x - \int \tan x(\sec x \tan x dx) = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$$

como $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$I = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

de donde:

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$
$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c_1$$
$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + c$$

77. $\int e^{ax} sen\, bx\, dx = I$

***Solución***: Haciendo:

$u = e^{ax}$ $\qquad dv = sen\, bx\, dx$

$du = e^{ax} a dx$ $\qquad v = -\frac{1}{b}\cos bx$

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx$$

Integrando por partes nuevamente:

$u = e^{ax}$ $\qquad dv = \cos bx dx$

$du = e^{ax} a dx$ $\qquad v = \frac{1}{b} sen\, bx$

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{ax} sen\, bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} sen\, bx\, dx\right]$$
$$\int e^{ax} sen\, bx\, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} sen\, bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} sen\, bx\, dx$$
$$\int e^{ax} sen\, bx\, dx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} sen\, bx\, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} sen\, bx + c_1$$
$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax} sen\, bx\, dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} sen\, bx + c_1$$
$$\int e^{ax} sen\, bx\, dx = \frac{-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} sen\, bx}{1 + \frac{a^2}{b^2}} + c$$

78. $\int x \arccos x dx = I$

***Solución***: Haciendo $u = arc\cos x$ , $du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $v = \dfrac{x^2}{2}$ , $dv = xdx$ ,

$$I = \frac{x^2}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\int x^2(1-x^2)^{-1/2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\int x\left[(1-x^2)^{-1/2}xdx\right]$$

Haciendo: $u = x$ , $du = dx$ ; $v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(1-x)^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{1-x^2}$ ,

$$dv = (1-x^2)^{-1/2}xdx = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(-2xdx),$$

$$I = \frac{x^2}{2}arc\cos x + \frac{1}{2}\left[-x\sqrt{1-x^2} + \int\sqrt{1-x^2}dx\right]$$
$$= \frac{x^2}{2}arc\cos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1)arc\,sen\frac{x}{1} + c$$
$$= \frac{x^2}{2}arc\cos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}arc\,sen\,x + c$$

***Ejercicios 4.3***

Resolver las siguientes integrales.

1. $\int e^{2x}xdx$
2. $\int x\sec^2 xdx$
3. $\int 5^x \cos xdx$
4. $\int x^3 sen\,x\,dx$
5. $\int sen\,x\cos 3xdx$
6. $\int x\cos 2xdx$
7. $\int arc\,sen\,3x\,dx$
8. $\int \cos(\ln x)dx$
9. $\int \ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)dx$
10. $\int e^{ax}\cos bxdx$
11. $\int (x^2+2x+1)e^x dx$
12. $\int x^3\sqrt{2+x}dx$
13. $\int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$
14. $\int 2x\sec^2 4xdx$

## *4.4 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS*

Para resolver integrales trigonométricas es necesario basarse en ciertas identidades trigonométricas, las cuales indicamos a continuación:

**Identidades:**

**a)** $sen^2x+\cos^2 x=1$ , **b)** $sen^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ , **c)** $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

*Ejemplos 4.4*

79. $\int \cos^2 x dx = I$

***Solución***: Utilizando la identidad c) para disminuir el grado, se tiene:

$$I=\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int dx+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\int \cos 2x(2dx)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x+c$$

80. $\int sen^3 x dx=\int sen^2 x\ sen\ x\ dx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad a), se tiene:

$$I=\int (1-\cos^2 x)sen\ x dx=\int senx dx-\int \cos^2 x senx dx$$

En la segunda integral: $u=\cos x$ , $du=-senxdx$,

$$I=\int senxdx+\int \cos^2 x(-senxdx)=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

81. $\int \cos^5 3x dx=\int \cos^4 3x\cos 3x dx=\int (\cos^2 3x)^2 \cos 3x dx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad a), se tiene:

$$I=\int (1-sen^2 3x)^2\cos 3x dx=\int (1-2sen^2 3x+sen^4 3x)\cos 3x dx$$
$$=\int \cos 3x dx-2\int sen^2 3x\cos 3x dx+\int sen^4 3x\cos 3x dx$$
$$=\frac{1}{3}\int \cos 3x(3dx)-\frac{2}{3}\int sen^2 3x\cos 3x(3dx)+\frac{1}{3}\int sen^4 3x\cos 3x(3dx)$$
$$=\frac{1}{3}sen3x-\frac{2}{3}\frac{sen^3 3x}{3}+\frac{1}{3}\frac{sen^5 3x}{5}+c$$
$$=\frac{sen3x}{3}-\frac{2}{9}sen^3 3x+\frac{1}{15}sen^5 3x+c=\frac{sen3x}{3}\left[1-\frac{2sen^2 3x}{3}+\frac{sen^4 3x}{5}\right]+c$$

82. $\int sen^3 x\cos^5 xdx = I$

***Solución***: Se sugiere que se descomponga la función que tenga la mínima potencia:

$$I = \int sen^2 senx\cos^5 xdx = \int(1-\cos^2 x)\cos^5 x\, senxdx$$
$$= \int\cos^5 x\, senxdx - \int\cos^7 x\, senxdx = -\frac{\cos^6 x}{6}+\frac{\cos^8 x}{8}+c$$

83. $\int sen^4 2xdx = \int(sen^2 2x)^2 dx = I$

***Solución***:

$$I = \int\left(\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)^2 = \int\frac{1}{4}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{2}{4}\int\cos 4xdx + \frac{1}{4}\int\cos^2 4xdx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos 4xdx + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}(1+\cos 8x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}\int\cos 4x(4dx) + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int\cos 8xdx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int\cos 4x(4dx) + \frac{1}{8}\int dx + \left(\frac{1}{8}\right)\frac{1}{8}\int\cos 8x(8dx)$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}sen4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{64}sen8x + c$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}sen4x + \frac{1}{64}sen8x + c = \frac{1}{8}\left[3x - sen4x + \frac{sen8x}{8}\right]+c$$

84. $\int\frac{dx}{\sec x\csc x} = \int\cos x\, senxdx = I$

***Solución***: Si $u = senx$ , $du = \cos xdx$

$$I = \frac{sen^2 x}{2}+c$$

**Identidades:**

**d**) $senx\cos x = \frac{1}{2}sen2x$ , **e**) $senx\cos y = \frac{1}{2}[sen(x-y)+sen(x+y)]$

**f**) $senx\, seny = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$ , **g**) $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$

85. $\int sen4x\cos 4x dx = I$

***Solución***: Utilizando la identidad **d**) se tiene:

$$I = \int \frac{1}{2} sen8x dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{8}\int sen8x(8dx)$$
$$= \frac{1}{16}\int sen8x(8dx) = -\frac{1}{16}\cos 8x + c$$

86. $\int sen2x\cos 3x dx = I$

***Solución***: Utilizando la identidad **e**) se tiene:

$$I = \int \frac{1}{2}[sen(2x-3x) + sen(2x+3x)]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int sen(-x)dx + \frac{1}{2}\int sen\,5x\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int sen(-x)(-dx) + \frac{1}{2}\int sen\,5x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cos(-x) + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{5}\int sen5x(5dx)$$
$$= \frac{1}{2}\cos(-x) - \frac{1}{10}\cos 5x + c$$

87. $\int sen3x\, sen2x\, dx = I$

***Solución***: Utilizando la identidad **f**) se tiene:

$$I = \int \frac{1}{2}[\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int \cos 5x dx = -\frac{1}{2}\int \cos x dx - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{5}\int \cos 5x(5dx)$$
$$= -\frac{1}{2} senx - \frac{1}{10} sen5x + c$$

88. $\int (\cos 4x\cos 2x)dx = I$

***Solución***: Utilizando la identidad **g**) se tiene:

$$I = \int \frac{1}{2}[\cos(4x-2x) + \cos(4x+2x)]dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{2}\int\cos 6xdx$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\int\cos 2x(2dx)+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{6}\int\cos 6x(6dx)$$
$$=\frac{1}{4}\int\cos 2x(2dx)+\frac{1}{12}\int\cos 6x(6dx)=\frac{1}{4}sen2x+\frac{1}{12}sen6x+c$$

**Identidades:**

**h**) $1-\cos x=2sen^2\frac{1}{2}x$ , **i**) $1+\cos x=2\cos^2\frac{1}{2}x$ , **j**) $1\pm senx=1\pm\cos\left(\frac{1}{2}\pi-x\right)$

89. $\int\sqrt{1-\cos x}dx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad **h**) se tiene:

$$I=\int\sqrt{2sen^2\frac{1}{2}xdx}=\int\sqrt{2}\sqrt{sen^2\frac{1}{2}xdx}$$
$$=\sqrt{2}\int sen\frac{1}{2}xdx=\sqrt{2}2\int sen\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}dx\right)$$
$$=-2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x+c$$

90. $\int 2\cos^2 2xdx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad **i**) se tiene:

$$I=\int(1+\cos 4x)dx=\int dx+\int\cos 4xdx$$
$$=\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 4x(4dx)=x+\frac{1}{4}sen4x+c$$

91. $\int 2\cos^2 x\,sen2xdx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad **i**) se tiene:

$$I=\int(1+\cos 2x)sen2xdx=\int sen2xdx+\int\cos 2x\,sen2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int sen2xdx(2)-\frac{1}{2}\int\cos 2x(-2sen2xdx)$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\frac{\cos^2 2x}{2}+c=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos^2 2x+c$$

**Identidades:**

**k**) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$ , **l**) $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

92. $\int(1+\tan^2 2x)dx$

***Solución***:

$$\int\sec^2 2xdx=\frac{1}{2}\int\sec^2 2x(2dx)=\frac{1}{2}\tan 2x+c$$

93. $\int\tan^5 2xdx=I$

***Solución***:

$$I=\int\tan^3 2x\tan^2 2xdx=\int\tan^3 2x(\sec^2 2x-1)dx$$
$$=\int\tan^3 2x\sec^2 2xdx-\int\tan^3 2xdx=I$$
$$=\frac{1}{2}\int\tan^3 2x\sec^2 2xdx(2)-\int\tan^3 2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int\tan^3 2x\sec^2 2x(2dx)-\int\tan^2 2x\tan 2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int\tan^3 2x\sec^2 2x(2dx)-\int(\sec^2 2x-1)\tan 2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int\tan^3 2x\sec^2 2x(2dx)-\int\tan 2x\sec^2 2xdx+\int\tan 2xdx$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\tan^4 2x}{4}-\frac{1}{2}\int\tan 2x(\sec^2 2x)(2dx)+\frac{1}{2}\int\tan 2x(2dx)$$
$$=\frac{\tan^4 2x}{8}-\frac{1}{2}\frac{\tan^2 2x}{2}+\frac{1}{2}\ln\sec 2x+c$$

94. $\int\tan^6 xdx=\int\tan^4 x\tan^2 xdx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad **k**) se tiene:

$$I=\int\tan^4 x(\sec^2 x-1)dx=\int\tan^4\sec^2 xdx-\int\tan^4 xdx$$
$$=\int\tan^4\sec^2 xdx-\int\tan^2 x\tan^2 xdx$$
$$=\int\tan^4 x\sec^2 xdx-\int\tan^2 x(\sec^2 x-1)dx$$
$$=\int\tan^4 x\sec^2 xdx-\int\tan^2 x\sec^2 xdx+\int\tan^2 xdx$$
$$=\int\tan^4 x\sec^2 xdx-\int\tan^2 x\sec^2 xdx+\int(\sec^2 x-1)dx$$

$$I=\int\tan^4 x\sec^2 xdx-\int\tan^2 xsev^2xdx+\int\sec^2 xdx-\int dx$$
$$=\frac{\tan^5 x}{5}-\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x-x+c$$

95. $\int\sec^6 2xdx=I$

***Solución***:

$$I=\int\sec^4 2x\sec^2 2xdx=\int(\sec^2 2x)^2\sec^2 2xdx$$
$$=\int(1+\tan^2 2x)^2\sec^2 2xdx=\int(1+2\tan^2 2x+\tan^4 2x)\sec^2 2xdx$$
$$=\int\sec^2 2xdx+\int\tan^2 2x(2\sec^2 2x)dx+\int\tan^4 2x\sec^2 2xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int\sec^2 2x(2dx)+\int\tan^2 2x(2\sec^2 2xdx)+\frac{1}{2}\int\tan^4 2x\sec^2 2x(2dx)$$
$$=\frac{1}{2}\tan 2x+\frac{\tan^3 2x}{3}+\frac{1}{2}\frac{\tan^5 2x}{5}+c=\frac{1}{2}\tan 2x+\frac{\tan^3 2x}{3}+\frac{\tan^5 2x}{10}+c$$

96. $\int\tan^3 x\sec^4 xdx=\int\tan^3 x\sec^2 x(\sec^2 xdx)=I$

***Solución***: Utilizando la identidad **k**) se tiene:

$$I=\int\tan^3 x(1+\tan^2 x)\sec^2 xdx=\int\tan^3 x\sec^2 xdx+\int\tan^5 x\sec^2 xdx$$
$$=\frac{\tan^4 x}{4}+\frac{\tan^6 x}{6}+c$$

97. $\int\cot^5 3xdx=\int\cot^3 3x\cot^2 3xdx=I$

***Solución***: Utilizando la identidad **l**) se tiene:

$$I=\int\cot^3 3x(\csc^2 3x-1)dx=\int\cot^3 3x\csc^2 3xdx-\int\cot^3 3xdx$$
$$=\int\cot^3 3x\csc^2 3xdx-\int\cot^2 3x\cot 3xdx$$
$$=\frac{1}{3}\int\cot^3 3x(3\csc^2 3xdx)-\int\cot^2 3x\cot 3xdx$$
$$=\frac{1}{3}\int\cot^3 3x(3\csc^2 3xdx)-\int(\csc^2 3x-1)\cot 3xdx$$
$$=\frac{1}{3}\int\cot^3 3x(3\csc^2 3xdx)-\int\cot 3x\csc^2 3xdx+\int\cot 3xdx$$
$$=\frac{1}{3}\int\cot^3 3x(3\csc^2 3xdx)-\frac{1}{3}\int\cot 3x(3\csc^2 3xdx)+\frac{1}{3}\int\cot 3x(3dx)$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{\cot^4 3x}{4}+\frac{1}{3}\frac{\cot^2 3x}{2}+\frac{1}{3}\ln|sen3x|+c=-\frac{\cot^4 3x}{12}+\frac{\cot^2 3x}{6}+\frac{1}{3}\ln|sen3x|+c$$

98. $\int \cot^3 x \csc^3 x dx = \int \cot^2 x \csc^2 x(\csc x \cot x dx) = I$

***Solución***: Utilizando la identidad **i**) tenemos:

$$I = \int (\csc^2 x - 1)\csc^2 x (\csc x \cot x dx)$$
$$= \int \csc^4 x (\csc x \cot x dx) - \int \csc^2 x (\csc x \cot x dx)$$
$$= -\int \csc^4 x(-\csc x \cot x dx) + \int \csc^2 x (-\csc x \cot x dx)$$
$$= -\frac{\csc^5 x}{5} + \frac{\csc^3 x}{3} + c$$

## *Ejercicios 4.4*

Resolver las siguientes integrales.

1. $\int sen^2 3x dx$
2. $\int \cos^4 2x dx$
3. $\int sen^5 x dx$
4. $\int sen^5 x \cos^5 x dx$
5. $\int \cos^3 x sen^2 x dx$
6. $\int \frac{dx}{\sec^3 x \csc^3 x}$
7. $\int sen 8x \cos 10x dx$
8. $\int 2\cos 3x \cos 2x dx$
9. $\int \frac{sen^3 3x}{\csc^2 3x} dx$
10. $\int \frac{\cos^3 5x}{sen^2 5x} dx$
11. $\int 2 sen^2 \frac{1}{2} x dx$
12. $\int (1-\cos x)^2 dx$
13. $\int 4 sen^2 \frac{1}{2} x \cos^2 \frac{1}{2} x dx$
14. $\int (1+\cos 6x) dx$
15. $\int \tan^3 4x dx$
16. $\int \sec^4 4x dx$
17. $\int \cot^7 2x dx$
18. $\int \tan^3 x \sec^3 x dx$
19. $\int \tan^7 2x \sec^4 2x dx$
20. $\int \cot \frac{1}{3} x \cos \frac{1}{3} x dx$

## *4.5 CAMBIO DE VARIABLE TRIGONOMÉTRICA*

Cuando tengamos una raíz en la integral, ya sea en el numerador o en el denominador, podemos resolverla por medio de un cambio de variable trigonométrica, efectuando un cambio de la siguiente forma:

| raíz de la forma: | cambio de variable: |
|---|---|
| $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$ | $u = \frac{a}{b} sen z$ |
| $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ | $u = \frac{a}{b} \tan z$ |
| $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ | $u = \frac{a}{b} \sec z$ |

Después de haber resuelto la integral, regresamos a nuestra variable inicial por medio de las relaciones pitagóricas de un triángulo rectángulo, como se verá en los siguientes ejemplos:

*Ejemplos 4.5*

99. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}} = I$

***Solución***: Se presenta una raíz de la forma $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, donde:

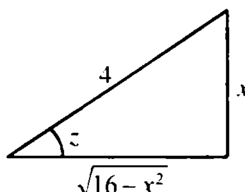
$$a^2 = 16 \qquad a = 4$$
$$b^2 = 1 \qquad b = 1$$
$$u^2 = x^2 \qquad u = x$$

de donde:

$$u = \frac{a}{b} senz \quad , \quad x = \frac{4}{1} senz \ldots (1)$$

Es necesario sustituir en la integral $dx = 4\cos z dz$ y $x^2 = (4sen\, z)^2$. Para sustituir la raíz, despejamos al $sen\, z$ de (1) y establecemos el triángulo rectángulo correspondiente

$sen\, z = \frac{x}{4}$ , de aquí




Para sustituir la raíz, se toma del triángulo rectángulo, a la raíz entre la constante:

$$\frac{\sqrt{16-x^2}}{4} = \cos z \quad ; \quad \sqrt{16-x^2} = 4\cos z$$

Realizando el cambio de variable en la integral, se tiene:

$$I = \int \frac{4\cos z dz}{(4senz)^2(4\cos z)} = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{sen^2 z} = \frac{1}{16}\int \csc^2 z dz = -\frac{1}{16}\cot z + c$$

Regresando a la variable original, del triángulo rectángulo establecido, se tiene:

$$I = -\frac{1}{16}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + c$$

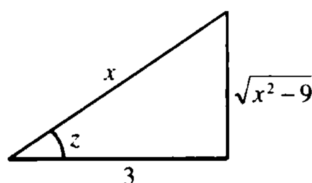
100. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}} = I$

***Solución***: Se tiene una raíz de la forma $\sqrt{b^2u^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{a}{b}\sec z$, donde:

$$b^2 = 1 \qquad b = 1$$
$$u^2 = x^2 \qquad u = x$$
$$a^2 = 9 \qquad a = 3$$
$$\therefore \; x = 3\sec z \qquad (1)$$

En la integral se tiene que sustituir $x^2 = (3\sec z)^2$ ; $dx = 3\sec z\tan z$. Despejando a la $\sec z$ de (1) se tiene: $\sec z = \frac{x}{3}$

Estableciendo el triángulo rectángulo correspondiente:




Dividiendo la raíz entre la constante:

$$\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} = \tan z \qquad ; \qquad \sqrt{x^2-9} = 3\tan z$$

Sustituyendo en la integral, tenemos:

$$I = \int \frac{(3\sec z)^2(3\sec z\tan zdz)}{3\tan z} = 9\int \sec^2 z\sec zdz = 9\int \sec^3 zdz$$

Resolviendo $\int \sec^3 zdz$ y después multiplicándola por 9 e integrando por partes:

$$u = \sec z \;,\; du = \sec z\tan z \;\; ; dv = \sec^2 zdz \;, v = \tan z$$

$$I = \sec z\tan z - \int \tan z(\sec z\tan zdz) = \sec z\tan z - \int \sec z\tan^2 zdz$$
$$= \sec z\tan z - \int \sec z(\sec^2 z - 1)dz$$
$$\int \sec^3 zdz = \sec z\tan z - \int \sec^3 zdz + \int \sec zdz$$

Agrupando a $\int \sec^3 z dz$ del lado izquierdo, se tiene:

$$2\int \sec^3 z dz = \sec z \tan z + \ln|\sec z + \tan z| + c_1$$

$$\int \sec^3 z dz = \frac{\sec z \tan z + \ln|\sec z + \tan z|}{2} + c$$

$$9\int \sec^3 z dz = \frac{9}{2}\left(\sec z \tan z + \ln|\sec z + \tan z|\right) + c$$

Regresando a la variable original:

$$I = \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + \ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|\right) + c = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right| + c$$

101. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+4x^2}} = I$

***Solución***: Se tiene una raíz de la forma:

$$\sqrt{9+4x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{a}{b}\tan z$$

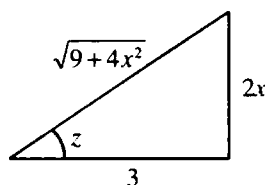
donde:

$$a^2 = 9 \qquad a = 3$$
$$b^2 = 4 \qquad b = 2$$
$$u^2 = x^2 \qquad a = x$$
$$\therefore \quad x = \frac{3}{2}\tan z \qquad (1)$$

Es necesario sustituir en la integral:

$$dx = \frac{3}{2}\sec^2 z dz \qquad x^2 = \left(\frac{3}{2}\tan z\right)^2$$

De la ecuación (1), se tiene: $\tan z = \frac{2x}{3}$, y el triángulo correspondiente es:



Dividiendo la raíz siempre entre la constante, se tiene:

$$\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3} = \sec z \qquad \therefore \qquad \sqrt{9+4x^2} = 3\sec z$$

Sustituyendo en la integral inicial, se tiene.

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 zdz}{\frac{9}{4}\tan^2 z(3\sec z)} = \frac{12}{18(3)}\int \frac{\sec^2 zdz}{\tan^2 z\sec z}$$

$$= \frac{12}{54}\int \frac{\sec z}{\tan^2 z}dz = \frac{12}{54}\int \frac{\frac{1}{\cos z}}{\frac{sen^2 z}{\cos^2 z}}dz = \frac{6}{27}\int \frac{\cos^2 zdz}{\cos zsen^2 z} = \frac{2}{9}\int \frac{\cos zdz}{sen^2 z}$$

$$= \frac{2}{9}\int sen^{-2}z\cos zdz = \frac{2}{9}\frac{sen^{-1}z}{-1} + c = \frac{-2}{9senz} + c = -\frac{2}{9}\csc z + c$$

$$= -\frac{2}{9}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} + c = -\frac{\sqrt{9+4x^2}}{9x} + c$$

102. $\int \frac{(4-4x^2)^{3/2}}{x^4}dx = \int \frac{\left(\sqrt{4-4x^2}\right)^3}{x^4}dx = I$

***Solución***: $\sqrt{4-4x^2}$ es del tipo $\sqrt{a^2-b^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{a}{b}senz$

$a^2 = 4 \qquad a = 2$

$b^2 = 4 \qquad b = 2$

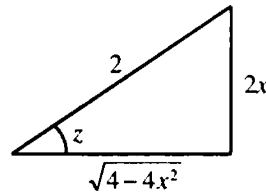
$u^2 = x^2 \qquad u = x$

$x = \frac{2}{2}sen\, z \qquad (1)$

$dx = \cos zdz$

$x^4 = (sen\, z)^4$

de (1) $sen\, z = \frac{2x}{2}$




$$\frac{\sqrt{4-4x^2}}{2} = \cos z \ , \ \sqrt{4-4x^2} = 2\cos z$$

$$I = \int \frac{(2\cos z)^3\cos zdz}{sen^4 z} = 8\int \frac{\cos^4 z}{sen^4 z}dz$$

$$= 8\int \cot^4 zdz = 8\int \cot^2 z\cot^2 zdz$$

$$= 8\int (\csc^2 z - 1)\cot^2 zdz = 8\int \cot^2 z\csc^2 zdz - 8\int \cot^2 zdz$$

$$= -8\int \cot^2 z(-\csc^2 zdz) - 8\int (\csc^2 - 1)dz$$

$$I=-8\left(\frac{\cot^3 z}{3}\right)-8\int\csc^2 z dz+8\int dz=-\frac{8}{3}\cot^3 z+8\cot z+8z+c$$

$$=-\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{4-4x^2}}{2x}\right)^3+8\frac{\sqrt{4-4x^2}}{2x}+8arc\tan\left(\frac{2x}{\sqrt{4-4x^2}}\right)+c$$

103. $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+4}\,dx=I$

***Solución***: $\sqrt{b^2u^2+a^2}$ $\Rightarrow$ $u=\frac{a}{b}\tan z$

$a^2=4$ $\quad a=2$

$b^2=1$ $\quad b=1$

$u^2=(x+1)^2$ $\quad u=x+1$

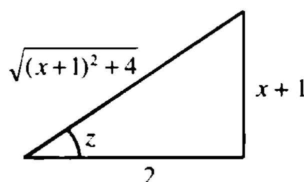
$du=dx$

$x+1=2\tan z\ \ldots(1)$

$x=2\tan z-1$

$dx=2\sec^2 zdz$

de (1), $\frac{x+1}{2}=\tan z$




$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2}=\sec z\quad;\quad\sqrt{(x+1)^2+4}=2\sec z$$

Sustituyendo en la integral, se tiene:

$$I=\int 2\sec z(2\sec^2 zdz)=4\int\sec^3 zdz$$

utilizando el resultado del ejemplo 2), se tiene que:

$$\int\sec^3 zdz=\frac{\sec z\tan z-\ln|\sec z\tan z|}{2}+c$$

Por lo que:

$$4\int\sec^3 zdz=2\sec\tan z-2\ln|\sec z+\tan z|+c$$

Del triángulo rectángulo tenemos:

$$I=2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2}\frac{(x+1)}{2}-\ln\left|\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2}+\frac{(x+1)}{2}\right|\right)+c$$

$$=\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}\,(x+1)}{2}-2\ln\left|\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2}+\frac{(x+1)}{2}\right|+c$$

104. $\int\sqrt{8-x^2-2x}\,dx=I$

***Solución***: $8-x^2-2x=8-(x^2+2x)=8-(x+1)^2+1=9-(x+1)^2$.
Se tiene una raíz de la forma:

$$\sqrt{a^2-b^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u=\frac{a}{b}\,senz$$

$$a^2=9 \qquad a=3$$

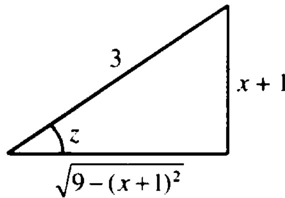
$$b^2=1 \qquad b=1$$

$$u^2=(x+1)^2 \qquad u=x+1$$

$$x+1=\frac{3}{1}\,sen\,z \quad ; \quad x+1=3sen\,z$$

$$dx=3\cos z dz$$

Despejando a $sen\,z$, se tiene: $sen\,z=\frac{x+1}{3}$.




Efectuando el cociente de la raíz entre la constante:

$$\frac{\sqrt{9-(x+1)^2}}{3}=\cos z \quad , \quad \sqrt{9-(x+1)^2}=3\cos z$$

Sustituyendo en la integral original:

$$I=\int(3\cos z)(3\cos z dz)=9\int\cos^2 z dz$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

$$I = 9\int \frac{1}{2}(1+\cos 2z)dz = \frac{9}{2}\int dz + \frac{9}{2}\int \cos 2z dz$$
$$= \frac{9}{2}z + \left(\frac{9}{2}\right)\frac{1}{2}\int \cos 2z(2dz) = \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}sen 2z + c$$

Utilizando la identidad:

$$senx \cos x = \frac{1}{2}sen 2x$$
$$sen\, 2x = 2senx \cos x$$
$$I = \frac{9}{2}z + \left(\frac{9}{4}\right)2senz \cos z + c$$

Regresando a la variable original, se tiene:

$$I = \frac{9}{2}arc\, sen\left(\frac{x+1}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{x+1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-(x+1)^2}}{3}\right) + c$$
$$= \frac{9}{2}arc\, sen\left(\frac{x+1}{3}\right) + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{9-(x+1)^2} + c$$

105. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{5/2}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^5} = I$

***Solución*:** Se tiene una raíz de la forma: $\sqrt{b^2u^2+a^2} \Rightarrow u = \frac{a}{b}\tan z$, donde:

$a^2 = 4 \qquad a = 2$

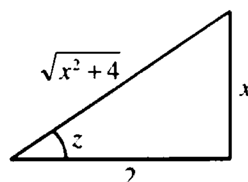
$b^2 = 1 \qquad b = 1$

$u^2 = x^2 \qquad u = x$

$x = \frac{2}{1}\tan z \ldots (1)$

$dx = 2\sec^2 z dz$

Despejando a $\tan z$ de la ecuación (1). $\tan z = \frac{x}{2}$



La raíz entre la constante:

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}=\sec z \ , \ \sqrt{x^2+4}=2\sec z$$

Sustituyendo, se tiene:

$$I=\int\frac{2\sec^2 zdz}{(2\sec z)^5}=\frac{1}{16}\int\frac{dz}{\sec^3 z}=\frac{1}{16}\int\cos^3 zdz$$
$$=\frac{1}{16}\int\cos^2\cos zdz=\frac{1}{16}\int(1-sen^2 z)\cos zdz$$
$$=\frac{1}{16}\int\cos zdz-\frac{1}{16}\int sen^2 z\cos zdz=\frac{1}{16}senz-\left(\frac{1}{16}\right)\frac{sen^3 z}{3}+c$$
$$=\frac{1}{16}senz-\frac{1}{48}sen^3 z+c=\frac{1}{16}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)-\frac{1}{48}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)^3+c$$

106. $\int\frac{dx}{4x\sqrt{16-9x^2}}=I$

***Solución***: La raíz es de la forma: $\sqrt{a^2-b^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u=\frac{a}{b}sen\,z$. donde:

$a^2=16 \qquad a=4$

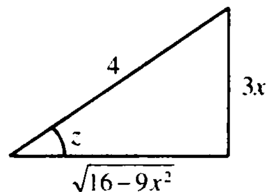
$b^2=9 \qquad b=3$

$u^2=x^2 \qquad u=x$

$x=\frac{4}{3}sen\,z\ldots(1)$

$dx=\frac{4}{3}\cos zdz$

En (1) despejando a $sen\,z$: $senz=\frac{3x}{4}$




La raíz entre la constante:

$$\frac{\sqrt{16-9x^2}}{4}=\cos z \quad ; \quad \sqrt{16-9x^2}=4\cos z$$

Sustituyendo en la integral original:

$$I = \int \frac{\frac{4}{3}\cos z dz}{4\left(\frac{4}{3} sen\ z\right)\left(4\cos z\right)} = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{sen\ z}$$

$$= \frac{1}{16}\int \csc z dz = \frac{1}{16}\ln\left|\csc z - \cot z\right| + c$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4}{3x} - \frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}\right| + c$$

107. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{9+4x^2}} = I$

***Solución:*** La raíz es de la forma: $\sqrt{a^2+b^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{a}{b}\tan z$, donde:

$a^2 = 9 \qquad a = 3$

$b^2 = 4 \qquad b = 2$

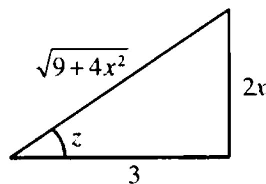
$u^2 = x^2 \qquad u = x$

$$x = \frac{3}{2}\tan z \ldots (1)$$

$$dx = \frac{3}{2}\sec^2 z dz$$

$$x^4 = \left(\frac{3}{2}\tan z\right)^4$$

Despejando $\tan z$ en la ecuación (1): $\tan z = \frac{2x}{3}$




$$\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3} = \sec z \quad ; \quad \sqrt{9+4x^2} = 3\sec z$$

Sustituyendo en la integral original:

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 z dz}{\left(\frac{3}{2}\tan z\right)^4\left(3\sec z\right)} = \frac{8}{81}\int \frac{\sec z dz}{\tan^4 z}$$

$$I=\frac{8}{81}\int\frac{\frac{1}{\cos z}dz}{\frac{sen^4 z}{\cos^4 z}}=\frac{8}{81}\int\frac{\cos^3 z}{sen^4 z}dz=\frac{8}{81}\int\frac{\cos^2 z\cos zdz}{sen^4 z}$$
$$=\frac{8}{81}\int\frac{(1-sen^2 z)\cos zdz}{sen^4 z}=\frac{8}{81}\int\frac{\cos zdz}{sen^4 z}-\frac{8}{81}\int\frac{\cos zdz}{sen^2 z}$$
$$=\frac{8}{81}\int sen^{-4} z\cos zdz-\frac{8}{81}\int sen^{-2} z\cos zdz$$
$$=\frac{8}{81}\left(\frac{sen^{-3} z}{-3}\right)-\frac{8}{81}\frac{sen^{-1}}{-1}+c=-\frac{8}{243sen^3 z}+\frac{8}{81senz}+c$$
$$=-\frac{8\csc^3 z}{243}+\frac{8\csc z}{81}+c=-\frac{8}{243}\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x}\right)^3+\frac{8}{81}\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x}\right)+c$$

108. $\int\frac{dx}{(9(x+2)^2-4)^{3/2}}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{9(x+2)^2-4}\right)^3}=I$

***Solución***: $\sqrt{b^2u^2-a^2}\quad\Rightarrow\quad u=\frac{a}{b}\sec z$, donde:

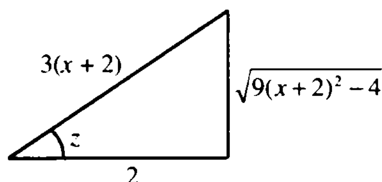
$a^2=4\qquad a=2$

$b^2=9\qquad b=3$

$u^2=(x+2)^2\qquad u=x+2$

$$x+2=\frac{2}{3}\sec z\ldots(1)$$
$$x=\frac{2}{3}\sec z-2$$
$$dx=\frac{2}{3}\sec z\tan zdz$$

Despejando $\sec z$ de (1) se tiene: $\sec z=\frac{3(x+2)}{2}$




La raíz entre la constante:

$$\frac{\sqrt{9(x+2)^2-4}}{2}=\tan z\quad;\quad\sqrt{9(x+2)^2-4}=2\tan z$$

Sustituyendo en la integral original, se tiene:

$$I = \int \frac{\frac{2}{3}\sec z \tan z dz}{(2\tan z)^3} = \frac{1}{12}\int \frac{\sec z dz}{\tan^2 z}$$
$$= \frac{1}{12}\int \frac{\frac{1}{\cos z}dz}{\frac{sen^2 z}{\cos^2 z}} = \frac{1}{12}\int \frac{\cos z}{sen^2 z}dz = \frac{1}{12}\int sen^{-2}\cos z dz$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{sen^{-1}z}{-1}\right) + c = -\frac{1}{12 sen z} + c = -\frac{1}{12}\csc z + c$$
$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{3(x+2)}{\sqrt{9(x+2)^2 - 4}}\right) + c$$

***Ejercicios 4.5***

Resolver las siguientes integrales.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+16x^2}}$
2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-9x^2}}$
3. $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{4+x^2}}$
4. $\int \frac{(9-16x^2)^{3/2} dx}{x^2}$
5. $\int \sqrt{x^2+4x+13}dx$
6. $\int (4x^2+9)^{7/2} dx$
7. $\int \frac{dx}{(4x^2+9)^{5/2}}$
8. $\int \frac{dx}{(4(x-2)^2-9)^{3/2}}$
9. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{4-4x^2}}$
10. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+4)^{5/2}}$

### 4.6 INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES

La forma común de escribir un polinomio es :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

al dividir un polinomio entre otro se nos presenta una fracción racional.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n}$$

Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la fracción racional se llama *propia*, por ejemplo:

$$\frac{3+2x+5x^3-x^6}{1+x^4+x^8}$$

En caso contrario, cuando el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador, la fracción racional se llama *impropia.* Por ejemplo:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^3-2x^2+4}$$

Toda fracción racional impropia se puede descomponer como la suma de un polinomio más una fracción racional propia.

***Ejemplo 109***

El cociente $\frac{x^3+2x^2+4x}{x^2+1}$ (fracción racional impropia), se puede descomponer como:

$$\begin{array}{rl} & x+2 \\ x^2+1 & \overline{x^3+2x^2+4x} \\ & -x^3 \qquad -x \\ & 2x^2+3x \\ & -2x^2 \qquad -2 \\ & 3x-2 \end{array}$$

$$\frac{x^3+2x^2+4x}{x^2+1}=(x+2)+\frac{3x-2}{x^2+1}$$

Al menos teóricamente todo polinomio de grado $n$ se puede descomponer como el producto de expresiones lineales de la forma $(ax+b)$ y de expresiones cuadráticas de la forma $(ax^2+bx+c)$.

Atendiendo a la naturaleza de los factores que se presenten en el denominador de un fracción racional propia se pueden presentar cuatro casos:

**Primero:**

*Factores lineales distintos.* Para cada factor lineal que se presenten en el denominador de un fracción racional propia, le corresponde una expresión de la forma $\frac{A}{ax+b}$, en donde $A$ es un valor constante a determinar.

$$\frac{P(x)}{ax+b}=\frac{A}{ax+b}$$

## Ejemplos 4.6

110. $\int \frac{dx}{x^2-16} = I$

***Solución:***

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}$$

Quitando denominadores:

$$1 = \frac{A(x-4)(x+4)}{x-4} + \frac{B(x-4)(x+4)}{x+4}$$
$$= A(x+4) + B(x-4) = Ax + 4A + Bx - 4B$$
$$= x(A+B) + (4A-4B)$$
$$A + B = 0 \qquad (1)$$
$$4A - 4B = 1 \qquad (2)$$

Multiplicando (1) por 4 y sumándosela a (2), se tiene:

$$4A + 4B = 0$$
$$4A - 4B = 1$$
$$8A \quad = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{8}$$

Sustituyendo este valor en (1):

$$\frac{1}{8} + B = 0 \quad \therefore \quad B = -\frac{1}{8}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{A}{x-4}dx + \int \frac{B}{x+4}dx = \int \frac{^1/_8}{x-4}dx + \int \frac{-^1/_8}{x+4}dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-4} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+4} = \frac{1}{8}\ln|x-4| - \frac{1}{8}\ln|x+4| + c = \ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|^{1/8} + c$$

111. $\int \frac{8x+4}{x^2-6x}dx = I$

***Solución:***

$$\frac{8x+4}{x^2-6x} = \frac{8x+4}{x(x-6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-6}$$

Quitando denominadores:

$$8x+4=A(x-6)+B(x)=Ax-6A+Bx=x(A+B)+(-6A)$$

$$A+B=8 \qquad (1)$$

$$-6A=4 \qquad (2) \quad \therefore \quad A=-\frac{4}{6}$$

Sustituyendo este valor en (1), se tiene:

$$-\frac{4}{6}+B=8 \quad \therefore \quad B=8+\frac{4}{6}=\frac{52}{6}$$

$$I=\int\frac{8x+4}{x^2-6x}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x-6}dx$$

$$=\int\frac{-\frac{4}{6}dx}{x}+\int\frac{\frac{52}{6}dx}{x-6}=-\frac{4}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{52}{6}\int\frac{dx}{x-6}$$

$$=-\frac{4}{6}\ln|x|+\frac{52}{6}\ln|x-6|+c$$

112. $\int\frac{3x+2}{x^2-x-6}dx=I$

***Solución*:**

$$\frac{3x+2}{x^2-x-6}=\frac{3x+2}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

Quitando denominadores:

$$3x+2=A(x+2)+B(x-3)=Ax+2A+Bx-3B$$

$$=x(A+B)+(2A-3B)$$

$$A+B=3 \qquad (1)$$

$$2A-3B=2 \qquad (2)$$

Multiplicando (1) por 3 y sumándosela a (2):

$$3A+3B=9$$

$$\underline{2A-3B=2}$$

$$5A \qquad =11 \quad \therefore \quad A=\frac{11}{5}$$

Sustituyendo este valor en (1), se tiene:

$$\frac{11}{5}+B=3 \quad \therefore \quad B=\frac{4}{5}$$

$$I=\int\frac{3x+2}{x^2-x-6}=\int\frac{A}{x-3}dx+\int\frac{B}{x+2}dx$$
$$=\int\frac{{}^{11}\!/_5\,dx}{x-3}+\int\frac{{}^{4}\!/_5\,dx}{x+2}=\frac{11}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x+2}$$
$$=\frac{11}{5}\ln|x-3|+\frac{4}{5}\ln|x+2|+c$$

## Segundo:

*Factores lineales repetidos*. Cuando en una fracción racional propia se presentan polinomios lineales que se repitan $n$ veces en el denominador, se puede descomponer esta expresión de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{Z}{(ax+b)^n}$$

siendo $A, B, C, \ldots, Z$ constantes a determinar.

113. $\int\frac{x^2+2x-6}{(x+3)^3}dx=I$

***Solución***:

$$\frac{x^2+2x-6}{(x+3)^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}$$

$$\begin{aligned}x^2+2x-6&=A(x+3)^2+B(x+3)+C\\&=A(x^2+6x+9)+B(x+3)+C\\&=Ax^2+6Ax+9A+Bx+3B+C\\&=x^2(A)+x(6A+B)+(9A+3B+C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A&=1 &(1)\\6A+B&=2 &(2)\\9A+3B+C&=-6 &(3)\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $A$ en la ecuación (2) se tiene:

$$6(1)+B=2\ \therefore\ B=-4$$

Sustituyendo los valores de $A$ y $B$ en (3), se tiene:

$$9(1)+3(-4)+C=-6\ \therefore\ C=-3$$

$$\int \frac{x^2+2x-6}{(x+3)^2}dx = \int \frac{A}{x+3}dx + \int \frac{B}{(x+3)^2}dx + \int \frac{C}{(x+3)^3}dx$$
$$= \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-4dx}{(x+3)^2} + \int \frac{-3dx}{(x+3)^3}$$
$$= \int \frac{dx}{x+3} - 4\int (x+3)^{-2}dx - 3\int (x+3)^{-3}dx$$
$$= \ln x+3 - \frac{4(x+3)^{-1}}{-1} - \frac{3(x+3)^{-2}}{-2} + c$$
$$= \ln x+3 + \frac{4}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)^2} + c$$

114. $\int \frac{5x-2}{x^3+x^2}dx = I$

***Solución:***

$$\frac{5x-2}{x^3+x^2} = \frac{5x-2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$5x-2 = A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2)$$
$$= Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$$
$$= x^2(A+C) + x(A+B) + B$$

de donde:

$$A+C=0 \qquad (1)$$
$$A+B=5 \qquad (2)$$
$$B=-2 \qquad (3)$$

Sustituyendo el valor de $B$ en (2), se tiene:

$$A-2=5 \therefore A=7$$

Sustituyendo en (1):

$$7+C=0 \therefore C=-7$$

$$I = \int \frac{5x-2}{x^3+x^2}dx = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x^2} + \int \frac{Cdx}{x+1}$$
$$= \int \frac{7dx}{x} + \int \frac{-2dx}{x^2} + \int \frac{-7dx}{x+1} = 7\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x^2} - 7\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= 7\ln|x| - 2\frac{x^{-1}}{-1} - 7\ln|x+1| + c = 7\ln|x| + \frac{2}{x} - 7\ln|x+1| + c$$

115. $\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2(x-1)}dx = I$

***Solución:***

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

$$x^2+2x+4 = A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$$
$$= Ax^2 - A + Bx - B + Cx^2 + 2Cx + C$$
$$= x^2(A+C)+x(B+2C)+(-A-B+C)$$

$$A+C=1 \quad (1)$$
$$B+2C=2 \quad (2)$$
$$-A-B+C=4 \quad (3)$$

De (1), $A=1-C$ (4)
De (2), $B=2-2C$ (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$-(1-C)-(2-2C)+C=4$$
$$-1+C-2+2C+C=4$$
$$4C=4+3 \;\therefore\; C=\frac{7}{4}$$

En (4): $A=1-\frac{7}{4}=-\frac{3}{4}$

En (5): $B=2-2\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{8}{4}-\frac{14}{4}=-\frac{6}{4}$

$$I=\int\frac{A}{x+1}dx+\int\frac{B}{(x+1)^2}dx\int\frac{C}{x-1}dx$$
$$=\int\frac{-\frac{3}{4}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{6}{4}dx}{(x+1)^2}+\int\frac{\frac{7}{4}dx}{x-1}$$
$$=-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{6}{4}\int(x+1)^{-2}dx+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$=-\frac{3}{4}\ln|x+1|-\left(\frac{6}{4}\right)\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+\frac{7}{4}\ln|x-1|+c$$
$$=-\frac{3}{4}\ln|x+1|+\frac{6}{4(x+1)}+\frac{7}{4}\ln|x-1|+c$$

**Tercero:**

*Factores cuadráticos distintos.* Cuando en una fracción racional propia se presenten factores cuadráticos en el denominador, que no se puedan factorizar a términos lineales escribimos $Ax+B$ sobre cada término cuadrático de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Donde $A$ y $B$ son constantes que se deben determinar.

116. $\int\frac{x^3+x^2-x-1}{(x^2+3)(x^2+2)}dx$

***Solución:***

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{(x^2+3)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$\begin{aligned}x^3+x^2-x-1&=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+3)\\&=Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+3Cx+Dx^2+3D\\&=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(2A+3C)+(2B+3D)\end{aligned}$$

de donde

$$A+C=1$$
$$B+D=1$$
$$2A+3C=-1$$
$$2B+3D=-1$$

En este sistema de ecuaciones, se observa que dos ecuaciones tienen las variables ($A$ y $C$) y las otras dos contienen las variables ($B$ y $D$), por lo cual podemos separar el sistema en dos sistemas de dos ecuaciones cada uno:

$$A+C=1 \quad (1) \qquad B+D=1 \quad (3)$$
$$2A+3C=-1 \quad (2) \qquad 2B+3D=-1 \quad (4)$$

Multiplicando (1) por $-2$ y sumándosela a (2), se tiene:

$$-2A-2C=-2$$
$$2A+3C=-1$$
$$C=-3$$

Sustituyendo este valor en (1), se tiene: $A-3=1 \;\therefore\; A=4$

Multiplicando (3) por $-2$ y sumándosela a (4), se tiene:

$$\begin{aligned} -2B-2D&=-2\\ 2B+3D&=-1\\ \hline D&=-3 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en (3), se tiene: $B-3=1 \therefore B=4$.
Con estos valores las integrales quedan como:

$$I = \int\frac{4x+4}{x^2+3}dx + \int\frac{-3x-3}{x^2+2}dx$$
$$= 2\int\frac{2xdx}{x^2+3} + 4\int\frac{dx}{x^2+3} - \frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}dx - 3\int\frac{dx}{x^2+2}$$

Las integrales 2ª y 4ª son de la forma $\int\frac{du}{u^2+a^2}$, donde:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u^2=x^2$ | $a^2=3$ | $u^2=x^2$ | $a^2=2$ |
| $u=x$ | $a=\sqrt{3}$ | $u=x$ | $a=\sqrt{2}$ |
| $du=dx$ | | $du=dx$ | |

Por lo tanto el resultado es:

$$I = 2\ln\left|x^2+3\right| + 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)arc\tan\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2\right| - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$
$$= \ln\left(x^2+3\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left|x^2+2\right|^{3/2} - \frac{3}{\sqrt{2}}arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

117. $\int\frac{2x^3-x^2+1}{x^4+3x^2+2}dx = I$

***Solución*:**

$$\frac{2x^3-x^2+1}{x^4+3x^2+2} = \frac{2x^3-x^2+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$\begin{aligned} 2x^3-x^2+1 &= (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)\\ &= Ax^3+2Ax+Bx^2+2B+Cx^3+Cx+Dx^2+D\\ &= x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(2A+C)+(2B+D) \end{aligned}$$

Se obtienen los sistemas de ecuaciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A+C=2$ | (1) | $B+D=-1$ | (3) |
| $2A+C=0$ | (2) | $2B+D=1$ | (4) |

multiplicando (1) por (-2) y sumándosela a (2), tenemos:

$$\begin{array}{r} -2A-2C=-4 \\ \underline{2A+C=0} \\ -C=-4 \\ C=4 \end{array}$$

sustituyéndose este valor en (1): $A-4=2 \therefore A=6$.
Multiplicando (3) por $-2$ y sumándosela a (4), tenemos:

$$\begin{array}{r} -2B-2D=2 \\ \underline{2B+D=1} \\ -D=3 \qquad D=-3 \end{array}$$

Sustituyendo este valor en (3): $B+3=-1 \quad \therefore \quad B=-2$, por lo que:

$$I=\int\frac{-2x-2}{x^2+1}dx+\int\frac{4x-1}{x^2+2}dx$$

$$=-\int\frac{2xdx}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+2}+2\int\frac{2x}{x^2+2}dx+3\int\frac{dx}{x^2+2}$$

$$=-\ln\left|x^2+1\right|-\frac{2}{\sqrt{2}}arc\ \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+2\ln\left|x^2+2\right|+\frac{3}{\sqrt{2}}arc\ \tan\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$

118. $\int\frac{x^3+2x+4}{x^4+10x^2+24}dx$

***Solución***:

$$\frac{x^3+2x+4}{x^4+10x^2+24}=\frac{x^3+2x+4}{\left(x^2+6\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+6}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^3+2x+4=(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\left(x^2+6\right)$$

$$=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+6Cx+Dx^2+6D$$

$$=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(4A+6C)+(4B+6D)$$

$$\begin{array}{r} A+C=1 \text{............}(1) \\ 4A+6C=2 \text{...........}(2) \\ B+D=0 \text{...........}(3) \\ 4B+6D=4 \text{..... .....}(4) \end{array}$$

Multiplicando (1) por -4 y sumándosela a (2) se obtiene $C=-1$, sustituyendo este valor en (1) se obtiene $A=2$

Multiplicando (3) por -4 y sumándosela a (4) se obtiene $D=2$, sustituyendo este valor (3) se obtiene $B=-2$. Por lo que:

$$I = \int \frac{4x+2}{x^2-6}dx + \int \frac{-3x-2}{x^2-4}dx$$
$$= 2\int \frac{2xdx}{x^2-6} + 2\int \frac{dx}{x^2-6} - \frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-4} - 2\int \frac{dx}{x^2-4}$$
$$= 2\ln\left|x^2-6\right| + 2\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4\right| - 2\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$$

## Cuarto:

*Factores cuadráticos repetidos.* A cada factor cuadrático repetido que se presente en el denominador de una fracción racional propia le corresponde una suma de fracciones de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{\left(ax^2+bx+c\right)^r} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \ldots + \frac{Rx+S}{\left(ax^2+bx+c\right)^r}$$

siendo $A$, $B$, $C$,...,$R$, $S$ constantes a determinar.

119. $\int \frac{2x^3+2x^2+x}{\left(x^2+8\right)^2}dx = I$

***Solución:***

$$\frac{2x^3+2x^2+x}{\left(x^2+8\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+8} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+8\right)^2}$$

$$2x^3+2x^2+x = (Ax+B)(x^2+8)+Cx+D$$
$$= Ax^3+8Ax+Bx^2+8B+Cx+D$$
$$= x^3(A)+x^2(B)+x(8A+C)x+(8B+D)$$
$$A=2 \qquad 8A+C=1$$
$$B=2 \qquad 8B+D=0$$

de donde:

$$A=2\ ,\ B=2\ ,\ C=-15\ ,\ D=-16$$

$$I = \int \frac{Ax+B}{x^2+8}dx + \int \frac{Cx+D}{(x^2+8)^2}dx$$
$$= \int \frac{2x+2}{x^2+8}dx + \int \frac{-15x-16}{(x^2+8)^2}dx$$
$$= \int \frac{2xdx}{x^2+8} + 2\int \frac{dx}{(x^2+8)} - 15\int \frac{xdx}{(x^2+8)^2} - 16\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^4}$$

Las tres primeras integrales son inmediatas, para resolver la cuarta realizamos un cambio de variable trigonométrico:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+8}\right)^4} = I_1$$

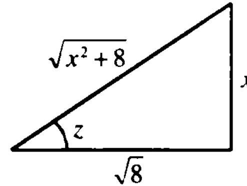
La raíz es de la forma $\sqrt{b^2u^2+a^2}$ , para la cual:

$$a^2 = 8 \qquad a = \sqrt{8}$$
$$b^2 = 1 \qquad b = 1$$
$$u^2 = x^2 \qquad u = x$$

cuyo cambio de variable es $u = \dfrac{a}{b}\tan z$

$$x = \frac{\sqrt{8}}{1}\tan z \rightarrow \tan z = \frac{x}{\sqrt{8}}$$

$$dx = \sqrt{8}\sec^2 z dz$$




$$\frac{\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{8}} = \sec z \quad ; \quad \sqrt{x^2+8} = \sqrt{8}\sec z$$

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{8}\sec^2 z dz}{\left(\sqrt{8}\sec z\right)^4} = \frac{1}{\left(\sqrt{8}\right)^3}\int \frac{dz}{\sec^2 z} = \frac{1}{(8)^{3/2}}\int \cos^2 z dz$$
$$= \frac{1}{(8)^{3/2}}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2z)dz = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}\int dz + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}\int \cos 2z dz$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(8)^{3/2}}\int dz + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{(8)^{3/2}}\int \cos 2z(2dz)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(8)^{3/2}}z + \frac{1}{4}\frac{1}{(8)^{3/2}}sen\, 2z + c$$

Por medio de la identidad trigonométrica $senx\cos x = \dfrac{1}{2}sen\, 2x$ regresamos a un ángulo sencillo:

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}arc\tan\frac{x}{\sqrt{8}} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}(2senz\cos z) + c$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{x^2+8}} + c$$

por lo tanto:

$$I = \ln\left|x^2+8\right| + 2\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{15}{2}\frac{\left(x^2+8\right)^{-1}}{-1}$$

$$-16\left[\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{8}} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(8)^{3/2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{x^2+8}}\right]+c$$

$$I = \ln x^2+8+\frac{2}{8}\arctan\frac{x}{8}+\frac{15}{2\left(x^2+8\right)}-8\frac{1}{(8)^{3/2}}\arctan\frac{x}{8}-\frac{8}{(8)^{3/2}}\frac{8x}{x^2+8}+c$$

120. $\displaystyle\int\frac{3x^2+2x+1}{x^4+8x^2+16}dx = \int\frac{3x^2+2x+1}{\left(x^2+4\right)^2}dx = I$

***Solución*:**

$$\frac{3x^2+2x+1}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$\begin{aligned} 3x^2+2x+1 &= (Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D) \\ &= Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx+D \\ &= x^3(A)+x^2(B)+x(4A+C)+(4B+D) \end{aligned}$$

de donde:

$$A=0 \qquad 4A+C=2$$
$$B=3 \qquad 4B+D=1$$

y:

$$A=0$$
$$B=3$$
$$C=2$$
$$D=-11$$

$$I = \int\frac{Ax+B}{x^2+4}dx + \int\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \int\frac{0x+3}{x^2+4}dx + \int\frac{2x-11}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

$$= 3\int\frac{dx}{x^2+4} + \int\left(x^2+4\right)^{-2}(2xdx) - 11\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^4}$$

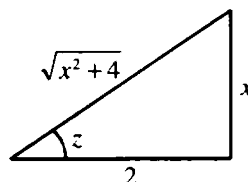
Resolviendo la tercera integral por un cambio de variable trigonométrica:

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{b^2u^2+a^2} \Rightarrow u = \frac{a}{b}\tan z$$

$$b^2 = 1 \qquad b = 1$$
$$a^2 = 4 \qquad a = 2$$
$$u^2 = x^2 \qquad u = x$$

$$x = \frac{2}{1}\tan z \quad , \quad dx = 2\sec^2 z dz \quad , \quad \tan z = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} = \sec z \ , \ \sqrt{x^2+4} = 2\sec z$$




de donde:

$$I_1 = \int \frac{2\sec^2 z dz}{(2\sec z)^4} = \frac{1}{8}\int \frac{dz}{\sec^2 z} = \frac{1}{8}\int \cos^2 z dz$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2z)dz = \frac{1}{16}\int dz + \left(\frac{1}{16}\right)\frac{1}{2}\int \cos 2z(2dz)$$
$$= \frac{1}{16}z + \frac{1}{32}sen\, 2z + c = \frac{1}{16}z + \frac{1}{32}(2) senz \cos z + c$$
$$= \frac{1}{16}z + \frac{1}{16}senz \cos z + c$$
$$= \frac{1}{16}arc\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right] + c \quad , \quad \text{por lo tanto,}$$

$$I = 3\left(\frac{1}{2}arc\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{(x^2+4)^{-1}}{-1} - 11\left\{\frac{1}{16}arc\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{(x^2+4)}\right)\right\} + c$$
$$= \frac{3}{2}arc\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{(x^2+4)} - \frac{11}{16}arc\tan\frac{x}{2} - \left(\frac{11}{8}\right)\frac{x}{x^2+4} + c$$

121. $\int \frac{x^5+2x^4-3x^3+2x^2-x+1}{(x^2+1)^3}dx$

***Solución:***

$$\frac{x^5+2x^4-3x^3+2x^2-x+1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^3}$$

$$x^5+2x^4-3x^3+2x^2-x+1 = (Ax+B)(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x^2+1) + (Ex+F)$$
$$= (Ax+B)(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)(x^2+1) + (Ex+F)$$

$$x^5+2x^4-3x^3+2x^2-x+1 = Ax^5+2Ax^3+Ax+Bx^4$$
$$+2Bx^2+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D+Ex+F$$
$$= x^5(A)+x^4(B)+x^3(2A+C)$$
$$+x^2(2B+D)+x(A+C+E)+(B+D+F)$$

de donde:

$$\begin{array}{lll} A=1 & A=1 & \\ B=2 & B=2 & \\ 2A+C=-3 & 2(1)+C=-3 & C=-5 \\ 2B+D=2 & 2(2)+D=2 & D=-2 \\ A+C+E=-1 & 1+(-5)+E=-1 & E=3 \\ B+D+F=1 & 2+(-2)+F=1 & F=1 \end{array}$$

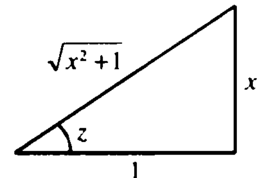
$$I = \int\frac{x+2}{x^2+1}dx+\int\frac{-5x-2}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{3x+1}{(x^2+1)^3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{5}{2}\int(x^2+1)^{-2}(2xdx)-2\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}$$
$$+\frac{3}{2}\int(x^2+1)^{-3}(2xdx)+\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^6}$$

Resolviendo por separado las integrales 4ª y 6ª, se tiene:

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}=I_1 \quad , \quad \sqrt{b^2u^2+a^2} \Rightarrow u=\frac{a}{b}\tan z$$

$$\begin{array}{ll} b^2=1 & b=1 \\ a^2=1 & a=1 \\ u^2=x^2 & u=x \end{array}$$

$$x=\frac{1}{1}\tan z \quad , \quad dx=\sec^2 zdz \quad , \quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{1}=\sec z$$




$$I_1 = \int\frac{\sec^2 zdz}{(\sec z)^4} = \int\frac{dz}{\sec^2 z} = \int\cos^2 zdz$$
$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)dz=\frac{1}{2}\int dz+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int\cos 2z(2dz)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int dz + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\,sen 2z + c = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}(2) senz\cos z + c$$

$$= \frac{1}{2} arc\tan\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^6}$$

de la forma:

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{b^2u^2+a^2} \Rightarrow u = \frac{a}{b}\tan z$$

donde:

$$a^2 = 1 \quad a = 1$$
$$b^2 = 1 \quad b = 1$$
$$u^2 = x^2 \quad u = x$$

$$x = \tan z \;\; ; \;\; dx = \sec^2 z dz \;\; , \;\; \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \sec z$$

$$I_2 = \int\frac{\sec^2 z dz}{(\sec z)^6} = \int\frac{dz}{\sec^4 z} = \int\cos^4 z dz$$

$$= \int(\cos^2 z)^2 dz = \int\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2z)\right]^2 dz$$

$$= \frac{1}{4}\int(1+2\cos 2z+\cos^2 2z)dz$$

$$= \frac{1}{4}\int dz + \frac{1}{2}\int\cos 2z dz + \frac{1}{4}\int\cos^2 2z dz$$

$$= \frac{1}{4}\int dz + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\int\cos 2z(2dz) + \frac{1}{4}\int\frac{1}{2}[1+\cos 4z]dz$$

$$= \frac{1}{4}\int dz + \frac{1}{4}\int\cos 2z(2dz) + \frac{1}{8}\int dz + \frac{1}{8}\int\cos 4z dz$$

$$= \frac{1}{4}\int dz + \frac{1}{4}\int\cos 2z(2dz) + \frac{1}{8}\int dz + \frac{1}{32}\int\cos 4z 4dz$$

$$= \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}sen 2z + \frac{1}{8}z + \frac{1}{32}sen 4z + c$$

$$= \frac{3}{8}z + \frac{1}{4}(2) senz\cos z + \frac{1}{32}[2 sen 2z\cos 2z] + c$$

$$= \frac{3}{8}z + \frac{1}{2}senz\cos z + \frac{1}{16}[senz\cos z] + c$$

$$I_2=\frac{3}{8}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{16}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right]+c$$
$$=\frac{3}{8}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{16}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]+c$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+2\arctan x-\frac{5}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}-2\left[\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}\right]$$
$$+\frac{3}{2}\frac{(x^2+1)^{-2}}{-2}+\frac{3}{8}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{16}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+2\arctan x+\frac{5}{2(x^2+1)}-\arctan x$$
$$-\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{x}{8(x^2+1)}\left(\frac{2}{x^2+1}-2\right)+c$$

## *Ejercicios 4.6*

Resolver las siguientes integrales.

1. $\int\frac{dx}{x^2-9}$
2. $\int\frac{dx}{x^2+4x}$
3. $\int\frac{dx}{x^3+6x^2+11x+6}$
4. $\int\frac{dx}{(x+2)^2}$
5. $\int\frac{dx}{(x-3)^3}$
6. $\int\frac{dx}{(x+1)^4}$
7. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$
8. $\int\frac{(3x^3+1)dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
9. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2-9)}$
10. $\int\frac{(x^3+1)dx}{(x^2+1)^2}$
11. $\int\frac{dx}{(x^2+2)^3}$
12. $\int\frac{(x^4+2x^3+x-1)dx}{(x^2+1)^2(x+2)}$

# CAPÍTULO V

# LA INTEGRAL DEFINIDA

## 5.1 INTRODUCCIÓN

El concepto de la tangente fue uno de los motivos para el desarrollo del cálculo; condujo al concepto de derivadas. Otro motivo importante que originó el concepto de integral fue el cálculo de las áreas.

## 5.2 SUMAS DE RIEMANN Y NOTACIÓN DE LEIBNIZ

Sea *f* una función definida en el intervalo $(a,b)$ y sea $n > 0$, se divide el intervalo $(a,b)$ en *N* subintervalos con puntos extremos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

se selecciona en cada subintervalo un punto $\xi_i$ $(psi)$ tal que:

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

y se forma la suma:

$$S = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_2)(x_3 - x_2) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

Al número *S* se le llama suma aproximada, o suma de Riemann, para la función *f*. El significado geométrico de *S* se ve en la figura 5.1.

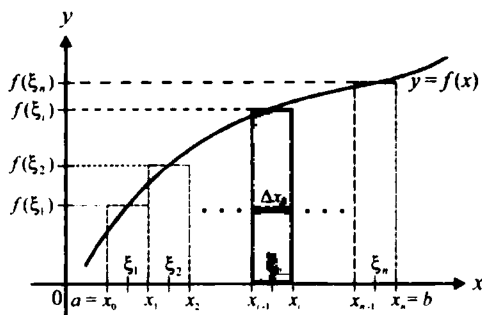



Fig. 5.1

$S$ es la suma de las áreas de rectángulos de anchuras o bases $(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_1),\ldots,(x_n - x_{n-1})$ y de las alturas $f(\xi_1), f(\xi_2),\ldots, f(\xi_n)$.

Si algunos de los rectángulos se encontraran debajo del eje $x$, sus áreas entrarían en $S$ con un signo menos.

Podemos ver separadamente el área de un rectángulo $i$ cualquiera.

$$A_i = \text{base} \times \text{altura} = f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Delta x_i = [x_i - x_{i-1}] = \text{base}$$

$$f(\xi_i) = \text{altura}$$

si sumamos todos los rectángulos obtenemos una aproximación del área real bajo la curva y está dada por la siguiente expresión:

$$\text{Área aproximada} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Si se toma el límite de esta suma cuando $n$ tiende a infinito, se tiene una mejor aproximación al área independientemente de la forma en que se subdivida el intervalo $[a,b]$ y del punto elegido en los subintervalos de donde observamos:

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

se conoce como la integral definida de $f$ entre $a$ y $b$. A los números $a$ y $b$ se les designa como extremos; otras personas les llaman límites de integración: inferior $a$, superior $b$.

### 5.3 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ es una función contínua definida en [a,b], entonces:

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

c) Si $f$ es una función en un intervalo cerrado [a,b] y $c$ es un punto del intervalo, donde $a < c < b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

d) Sea $k$ una constante y $f(x)$ una función integrable en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

e) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones integrables en $[a,b]$; entonces:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

f) Si $f(x)$ y $h(x)$ son funciones integrables, tales que $f(x) \leq h(x)$ para toda $x$ de $[a,b]$, donde $a < b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx$$

***Ejemplos 5.2***

3. $\int_1^4 xdx$

***Solución***:

$$\int_1^4 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

Se observa que $F(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x) = x$.

4. $\int_0^\pi sen\;\; xdx$

***Solución***:

$$\int_0^\pi sen\;\; xdx = -\cos x\,_0^\pi = -[\cos\pi - \cos 0] = -(-1-1) = 2$$

5. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

***Solución***:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Se observa que la función $1/x$ es continua en todo intervalo que no contenga el cero; por lo tanto es integrable en todo intervalo que no contenga a cero.

6. $\int_a^b e^x dx$

***Solución***:

$$\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$$

7. Evaluar la integral definida: $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$ .

***Solución***:

$$\int_0^1 (2x-1)^2 dx = \int_0^1 \left(4x^2 - 4x + 1\right) dx = \frac{4}{3}\left[x^3\right] - 2x^2 + x\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 1\right) - \left(\frac{4}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 0\right)$$

$$= \frac{4}{3}(1)^3 - 2 + 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

8. $\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x}$

***Solución***:

Como $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$, entonces:

$$\int_a^b \sec^2 x dx = \tan x\Big|_a^b = \tan b - \tan a$$

9. Dada la función escalonada $g(x)$, tal que:

$$g(x) = \begin{cases} 6 & si \quad -3 < x \le -2 \\ 2 & si \quad -2 < x \le 0 \\ 3 & si \quad 0 < x \le 2 \\ -2 & si \quad 2 < x < 4 \end{cases} \quad , \; \textit{definida en} \quad (-3,4)$$

***Solución***:

$$\int_{-3}^{4} g(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} 6dx + \int_{-2}^{0} 2dx + \int_{0}^{2} 3dx + \int_{2}^{4} (-2)\,dx = 12$$

***Ejemplos 5.3***

2. Calcule una suma de Riemann para $\int_{0}^{0.5} (1 + x^2)\,dx$ y para la subdivisión:

$$0 \le 0.1 \le 0.2 \le 0.3 \le 0.4 \le 0.5$$

***Solución***: Se selecciona un punto en cada uno de los 5 intervalos; los cuales son 0.05, 0.15, 0.25, 0.35 y 0.45. Entonces la suma deseada es:

$$(1+0.05^2)(0.1-0)+(1+0.15^2)(0.2-0.1)+(1+0.25^2)(0.3-0.2)+$$
$$(1+0.35^2)(0.4-0.3)+(1+0.45^2)(0.5-0.4)=0.54125$$

la cual es una aproximación al valor de $\int_{a}^{5} (1 + x^2)dx = 0.5416$

**Teorema del valor medio para integración definida**

**Teorema 5.3.1**

Si la función $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existe en $(a,b)$ un punto $\xi$ tal que:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

a $f(\xi)$ se le conoce como el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

**Teorema 5.3.2**

Teorema fundamental del cálculo

Si una función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F$ es cualquier función, tal que $F'(x) = f(x)$ para toda $x$ en $[a,b]$.

*Ejercicios 5.3*

Resolver las siguientes integrales.

1. $\int_a^b x^n dx$
2. $\int_0^3 x^{-3} dx$
3. $\int_c^b a^x dx$
4. $\int_1^4 \frac{t-2}{\sqrt{t}} dt$
5. $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$
6. $\int_{\sqrt{2}}^{\pi} e^t dt$
7. $\int_1^4 \sqrt{z} dz$
8. $\int_0^9 (-x^2+9x) dx$
9. $\int_2^5 (-x^2-8x+12) dx$
10. $\int_0^2 (4x-2x^2) dx$

## 5.4 INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN POSITIVA

Se tiene un función continua $y=f(x)$ definida para $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$ y su gráfica se encuentra sobre del eje $x$ (figura 5.1). Limitada por las rectas $x=a$, $x=b$ y $y=0$. La región bajo la curva tiene un área definida A que discutiremos más adelante. Por el momento aceptamos el concepto intuitivo de área de una región.

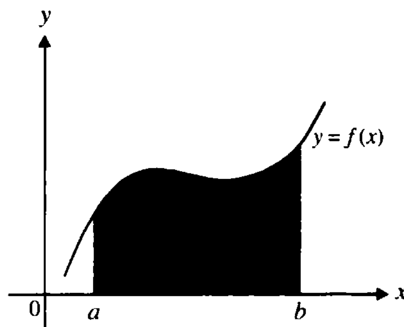



Fig. 5.2

El valor de A depende de la función $f$ y de los números $a$ y $b$, de donde:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

*Ejemplo 5.4.1*

El símbolo $\int_2^3 x dx$ representa el área indicada en la figura 5.3, es decir

$$A = \int_2^3 x dx$$

***Solución:***

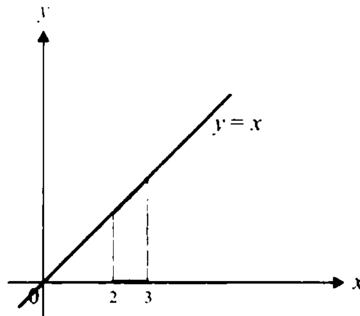



Fig. 5.3

## 5.5 ÁREA BAJO EL EJE X

La figura 5.4 muestra diferentes regiones arriba y abajo del eje $x$.

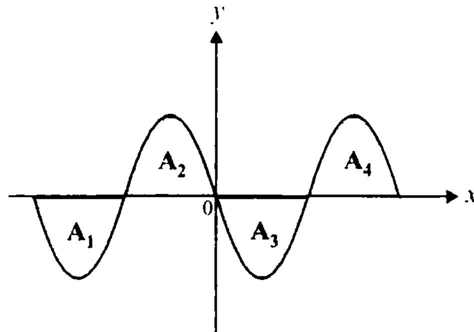



Fig. 5.4

$$A = \int_a^b f(x)$$

Es igual a la suma de las áreas $A_2$ y $A_4$ menos la suma de las áreas $A_1$ y $A_3$, son siempre positivas, esto es tomamos el valor absoluto de la función $y = f(x)$ .

# CAPÍTULO VI

# APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

## 6.1 EL ÁREA BAJO UNA CURVA

De lo visto en el capítulo anterior, se puede identificar el área limitada por la función $f(x) \geq 0$ y por las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje $x$, por medio de la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

como se muestra en la figura 6.1.

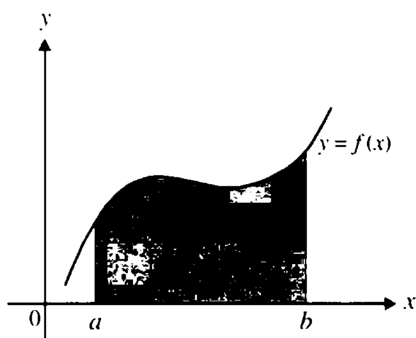



Figura 6.1

**_Ejemplos 6.1_**

1. Dada la función $f$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, encontrar el área de la región bajo la gráfica desde $x = 1$ hasta $x = 8$.

   ***Solución***:

$$A = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_1^8 x^{1/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_1^8 = \frac{3}{4}\left(8^{4/3} - 1^{4/3}\right) = \frac{45}{4}u^2$$

Nota: El área está dada en unidades cuadradas, dependiendo del problema de aplicación serán $cm^2$, $m^2$, $dm^2$, etc.

La región se muestra en la figura 6.2.

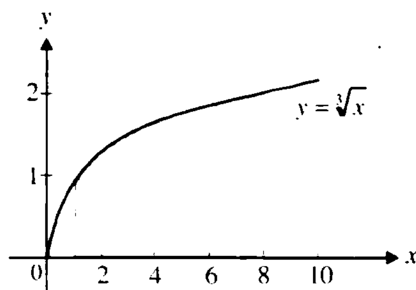



Figura 6.2

2. Calcular el área limitada por la parábola $y = -x^2 + 4x$ y el eje $x$.

***Solución***: En esta caso se observa que no se dieron en forma explícita las rectas $x = a$ y $x = b$ pero se encuentran buscando los puntos de intersección de la curva con el eje $x$, haciendo $y = 0$, esto es, $-x^2 + 4x = 0$. Factorizando: $x(-x+4) = 0$, de donde las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = 4$.

La representación gráfica se muestra en la figura 6.3.

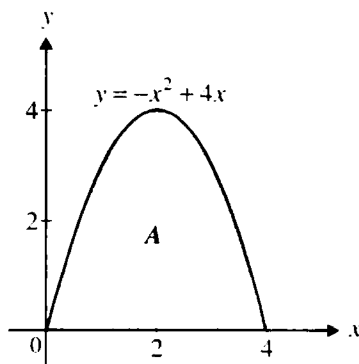



Figura 6.3

$A$ es el área de la región bajo la gráfica dada entonces:

$$A = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right)\, dx = \left.\frac{-x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right|_0^4$$

$$= -\frac{4^3}{3} + \frac{4(4)^2}{2} = \frac{32}{3}\ u^2$$

3. Si nuevamente se calcula el área de la misma parábola $y=-x^2+4x$, el eje $x$, pero ahora desde $x=1$ hasta $x=3$ tenemos:

***Solución:*** la representación gráfica se muestra en la figura 6.4):

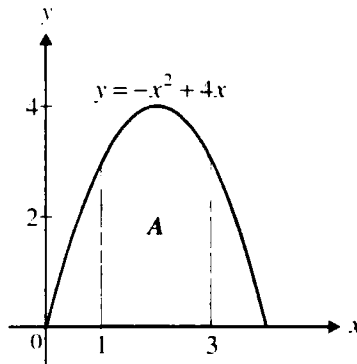



Figura 6.4

entonces:

$$A=\int_1^3\left(-x^2+4x\right)\,dx=\left.\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right|_1^3$$

$$=\left(-\frac{(3)^3}{3}+\frac{4(3)^2}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{2}\right)=\frac{22}{3}\ u^2$$

4. Calcular el área de la función $y=3$ desde $x=1$ a $x=3$ y el eje horizontal.

***Solución***: La representación gráfica se muestra en la figura 6.5.

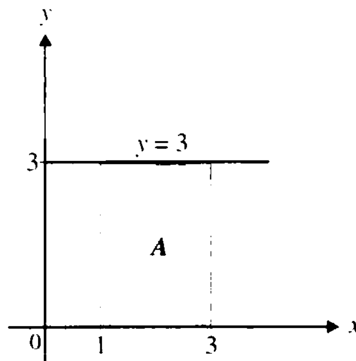



Figura 6.5

$$A=\int_1^3 3dx=3x\Big|_1^3=3(3)-3(1)=6\ u^2$$

Ahora, **si la función está por debajo del eje $x$**, o sea $f(x)<0$ en $[a,b]$ entonces consideramos $y=|\ f(x)\ |\geq 0$, como se muestra en la figura 6.6, y se escribe:

$$A=-\int_a^b f(x)dx$$

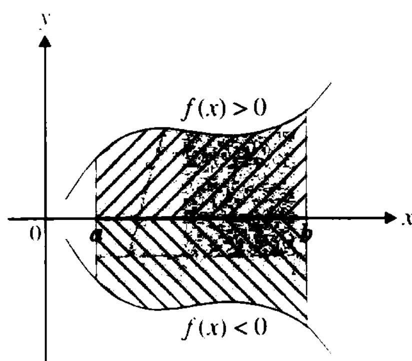



Figura 6.6

5. Calcular el área $A$ limitada por la función $f(x)=senx$ y el eje $x$ en $[0,2\pi]$.

***Solución***: La representación gráfica de la función se observa en la figura 6.7.

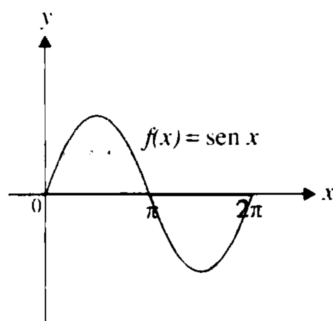



Figura 6.7

De la gráfica:

$$A=\int_0^{2\pi}senx\,dx=\int_0^{\pi}senx\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}senx\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=2+2=4\ u^2$$

También se puede presentar el caso análogo $A = \int_c^d g(y)\,dy$.

6. Calcular el área limitada por la parábola $x = 3 + 2y - y^2$, el eje $y$ y las rectas $y = 0$, $y = 1$.

*Solución*: Se grafica para encontrar los puntos de intersección con el eje $y$ haciendo $x = 0$, o sea $3 + 2y - y^2 = 0$, la cual, cambiando el signo es equivalente a:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \text{ , factorizando, } (y-3)(y+1) = 0$$

de donde $y = 3$ y $y = -1$. En estos valores $x = 0$ tenemos los puntos $(0,-1)$, $(0,3)$. Damos valores intermedios del intervalo $[-1,3]$:

| $3 + 2y - y^2$ | $x$ |
|---|---|
| $y = -1$ | $x = 0$ |
| $y = 0$ | $x = 3$ |
| $y = 1$ | $x = 4$ |
| $y = 2$ | $x = 3$ |

La representación gráfica con estos valores se muestra en la figura 6.8.

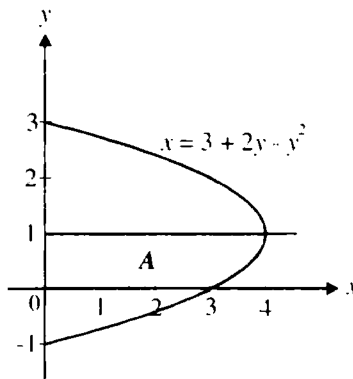



Figura 6.8

$$A = \int_0^1 (3 + 2y - y^2)\,dy = 3y + \frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1$$

$$= 3 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \quad u^2$$

## *6.2 ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS*

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a, b]$ donde $f(x) \geq g(x)$ para toda $x$ en $[a, b]$.

Para encontrar el área limitada o acotada por las dos curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ que se muestran en la parte sombreada de la figura 6.9, el procedimiento a seguir es: Al área acotada por la función $f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ le restamos el área limitada por la función $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, esto es:

$$A = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$

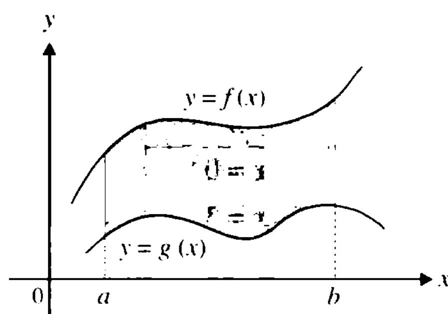



Figura 6.9

***Ejemplos 6.2***

7. Calcular el área acotada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$.

***Solución***: Buscamos las coordenadas de los 2 puntos de intersección de ambas curvas igualando las ordenadas, o sea, $x = x^2$, de donde: $x^2 - x = 0$.

Factorizando, $x(x-1) = 0$, se tiene, $x = 0$ y $x = 1$ que serán las abcisas de los puntos buscados y las ordenadas ($y$'$s$) las encontraremos sustituyendo estos valores en las funciones originales, o sea:

si $y = x$, para $x = 0$ se tiene: $y = 0$; si $y = x$, para $x = 1$ se tiene: $y = 1$ y obtenemos los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ en donde se cortan las curvas, como se muestra en la figura 6.10. Por lo tanto, el área buscada es:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\ dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad u^2$$

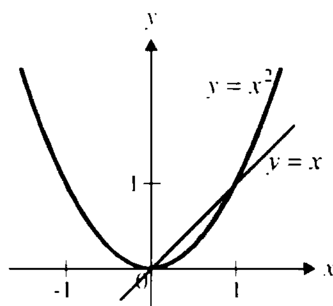



Figura 6.10

Nota: Cuando se dude de cual es $f$ y cual es $g$ para que se cumpla $f(x) \geq g(x)$, se comparan las dos curvas en un punto dentro del intervalo $[a,b]$, como en las curvas $y_1 = x$ y $y_2 = x^2$ definidas en $[0,1]$ tomamos:

$$x = \frac{1}{2} \text{, entonces } y_1 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{, entonces } y_2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

es por eso que en el integrando se tiene la recta menos la parábola.

8. Encontrar el área de la región entre las gráficas de las funciones $y = x - 2$ y $y = 2x - x^2$.

***Solución***: Si se intersectan las dos curvas para encontrar los puntos cuyas coordenadas son soluciones simultáneas de las dos ecuaciones, esto es,

$$x - 2 = 2x - x^2$$

Pasando los términos a un solo lado y factorizando se tiene:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$$

de donde $x = 2$, $x = -1$, o sea, tenemos $P(2, y)$ y $Q(-1, y)$.

Para encontrar $y$, se sustituyen los valores de $x$ en cualquiera de las ecuaciones dadas obteniendo $P(2,0)$ y $Q(-1,-3)$, que son los puntos comunes a las dos gráficas, como se muestra en la figura 6.11.

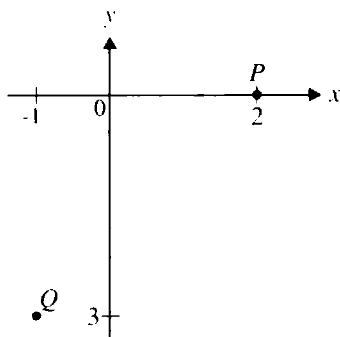



Figura 6.11

Damos otro punto del dominio de la recta para saber por dónde pasa la curva, es decir, si $x = 0$, $y = x - 2 = 0 -$ _ _ y tenemos el punto $(0,-2)$.

Análogamente, en la parábola $y = 2x - x^2$ damos los puntos $x = 0$ obteniendo $y = 0$, y $x = 1$ obteniendo $y = 1$.

Por lo tanto la gráfica es (figura 6.12):

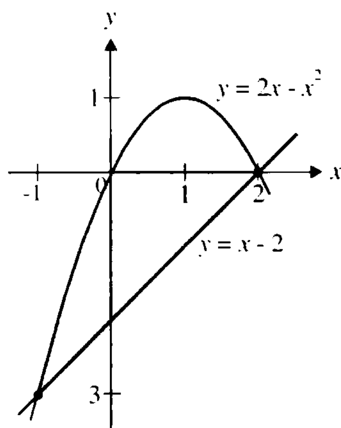



Figura 6.12

Entonces:

$$A = \int_{-1}^{2} \left( \left(2x - x^2\right) - (x - 2) \right) dx = \int_{-1}^{2} \left( -x^2 + x + 2 \right) dx$$

$$= \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right)_{-1}^{2} = \frac{9}{2} \ u^2$$

9. Encontrar el área de la región limitada que está en los cuadrantes $I$ y $IV$, de la gráfica de la función $y^2 = 4x^2 - x^4$.

***Solución***: Como $y = \pm\ x\ \sqrt{4-x^2}$, la gráfica es simétrica respecto a uno y otro ejes de coordenadas.

Los puntos de corte con el eje $x$ son

$$x\sqrt{4-x^2} = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \ \text{y} \ \sqrt{4-x^2} = 0,$$

o sea, $4 - x^2 = 0$; de donde $x^2 = 4 \quad \therefore \quad x = \pm 2$, como se observa en la figura 6.13.

Ahora se encontrará el área de la región sombreada que está entre $x = 0$ y $x = 2$. La ecuación de la parte de arriba del eje $x$ es

$$y = x\sqrt{4-x^2}$$

y la ecuación de la región debajo del eje $x$ es

$$y = -x\sqrt{4-x^2}$$

$$A = \int_0^2 \left(\left(x\sqrt{4-x^2}\right) - \left(-x\sqrt{4-x^2}\right)\right)dx = \int_0^2 2x\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{16}{3} \quad u^2$$

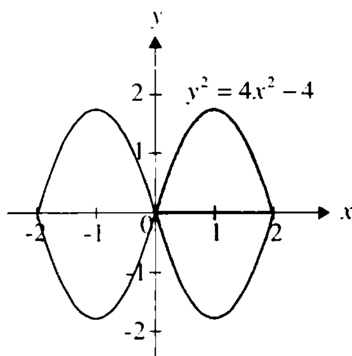



Figura 6.13

10. Hallar el área de la región encerrada por $y = x^2$ y $y = 9$.

***Solución***: Para encontrar puntos de corte hacemos $x^2 = 9$, de donde $x = 3$ y $x = -3$. La representación gráfica se muestra en la figura 6.14.
El área es:

$$A = \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)\ dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 36 \quad u^2$$

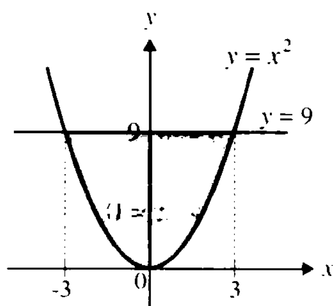



Figura 6.14

## *Ejercicios 6.2*

Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes ecuaciones. Bosqueje cada región.

1. $y = x^3$ , $y = 0$ , $x = 1$ , $x = 3$
2. $y = 9 - x^2$ , $y = 0$ , $x = -2$ , $x = 1$
3. $y = x^2$ , $x = y^2$
4. $y = \cos x$ , el eje $x$ recta $x = 0$ , $x = 2\pi$
5. $y = x^3$ , $y = 3x + 2$
6. $y^2 = 3x - 2$ , $y = x - 2$
7. $f(x) = x^2 + 3x - 5$ , $g(x) = x + 3$
8. $y^2 = 4x$ , $x = 1$
9. $y = x^2$ , $y = 1$
10. $y = 5x$ , $y = x^3 - 4x$

# CAPÍTULO VII

# VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

## *7.1 DEFINICIÓN*

En muchas ocasiones es necesario diseñar una pieza para una maquinaria, ya sea como molde o parte de un sistema mecánico y a partir de ahí calcular el costo de ésta.

Para el diseño de la pieza, se puede trabajar con los llamados sólidos de revolución, los cuales se generan al rotar un área plana alrededor de un eje determinado, llamado **eje de revolución**.

Este volumen corresponde al área bajo la curva, limitada por unas rectas y rotada inicialmente sobre algún eje coordenado.

Para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución emplearemos tres métodos que son: Método de Discos, Método de Arandelas y Método de Capas Cilíndricas.

## *7.2 MÉTODO DE DISCOS*

Definamos un área bajo la curva limitada por una función $y = f(x)$ y dos rectas $x = a$, $x = b$ y se rota inicialmente sobre el eje $x$, figura 7.1.

Supongamos que $f(x)$ es una función positiva y continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, dividamos este intervalo en $n$ subintervalos, donde cada subintervalo tendrá el tamaño $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, figura 7.2

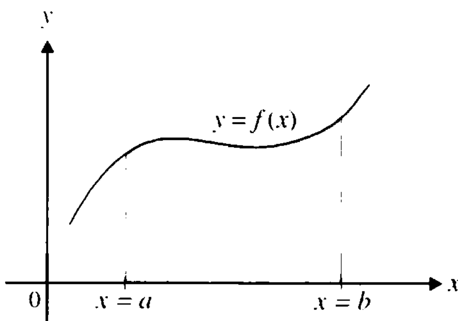



Figura 7.1

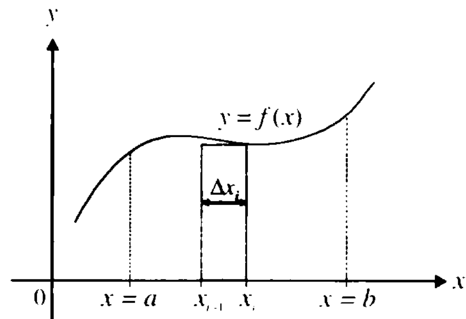



Figura 7.2

Si rotamos esta parte del área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje $x$ y las rectas $x_{i-1}$, $x_i$, observamos que se genera un círculo con un pequeño grosor $x_i - x_{i-1}$, como se muestra en la figura 7.3.

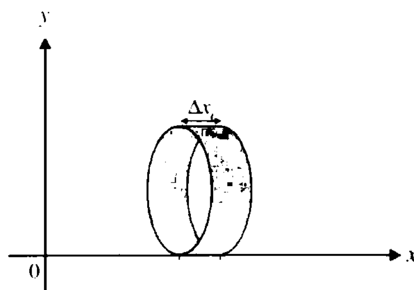



Figura 7.3

Si llamamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y recordamos que el área de un círculo está dada por $A = \pi \ \ r^2$ donde $r = f(x)$; en cada punto se tiene que el volumen está dado por:

$$V = \pi r^2 \Delta x_i = \pi[f(x)]^2 \Delta x_i = \pi \ y^2 \Delta x_i$$

Si hacemos $dx = \Delta x_i$ y sumamos todos esos pequeños volúmenes tendremos que el volumen total estará dado por $V = \sum_{n=1}^{n} \pi \ y^2 dx$ y si hacemos que el tamaño de cada subintervalo tienda a cero, podemos escribir:

$$V = \int_a^b \pi \ y^2 dx$$

fórmula utilizada para calcular el volumen generado al rotar el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje $x$, al rotarla alrededor del eje $x$.

De una forma similar la fórmula utilizada para calcular el volumen generado al rotar el área limitada por la curva $x = g(y)$, las rectas $y = c$, $y = d$ y el eje $y$ al ser rotada alrededor del eje $y$ será:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

***Ejemplos 7.2***

1. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región limitada en el primer cuadrante entre $y = 5x - x^2$, la recta $x = 3$ y el eje $x$ al rotarla alrededor del eje $x$.

***Solución***: Dando valores a $x$ se obtiene la figura 7.4:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 2.25 |
| 1.0 | 4.00 |
| 1.5 | 5.25 |
| 2.0 | 6.00 |
| 2.5 | 6.25 |
| 3.0 | 6.00 |
| 3.5 | 5.25 |
| 4.0 | 4.00 |

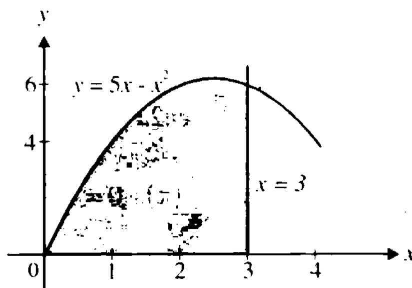



Figura 7.4

Cálculo del volumen:

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^3 (5x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^3 (25x^2 - 10x^3 + x^4)dx$$

$$= \pi\left[\frac{25x^3}{3} - \frac{10x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \pi\left[\frac{25}{3}(27) - \frac{10}{4}(81) + \frac{243}{5}\right]$$

$$= 71.1\pi \quad u^3$$

2. Calcular el volumen del sólido de revolución limitado por $y = sen^2x$, $x = 0$, $x = \pi$ y el eje $x$ al rotar alrededor del eje $x$.

***Solución***: Dando valores a $x$ y trazando el gráfico correspondiente se obtiene la figura 7.5:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| π/2 | 1 |
| π | 0 |

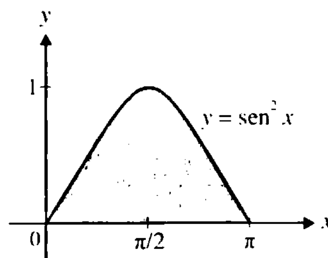



Figura 7.5

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^\pi (sen^2x)^2 dx = \pi\int_0^\pi \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2xdx + \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \cos^2 2xdx$$

***Solución***: Dando valores a $x$ se obtiene la figura 7.4:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 2.25 |
| 1.0 | 4.00 |
| 1.5 | 5.25 |
| 2.0 | 6.00 |
| 2.5 | 6.25 |
| 3.0 | 6.00 |
| 3.5 | 5.25 |
| 4.0 | 4.00 |

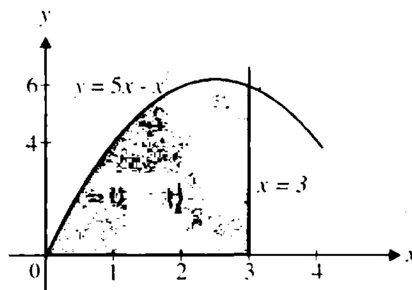


Figura 7.4

Cálculo del volumen:

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^3 (5x-x^2)^2\,dx = \pi\int_0^3 (25x^2-10x^3+x^4)dx$$

$$= \pi\left[\frac{25x^3}{3}-\frac{10x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \pi\left[\frac{25}{3}(27)-\frac{10}{4}(81)+\frac{243}{5}\right]$$

$$= 71.1\pi \quad u^3$$

2. Calcular el volumen del sólido de revolución limitado por $y = sen^2x$, $x=0$, $x=\pi$ y el eje $x$ al rotar alrededor del eje $x$.

***Solución***: Dando valores a $x$ y trazando el gráfico correspondiente se obtiene la figura 7.5:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| π/2 | 1 |
| π | 0 |

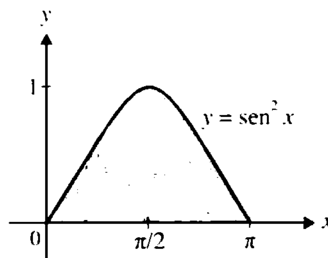


Figura 7.5

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^\pi (sen^2x)^2\,dx = \pi\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x dx + \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \cos^2 2x dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x(2dx) + \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx$$

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \cos 2x(2dx) + \frac{\pi}{8}\int_0^\pi dx + \left(\frac{\pi}{8}\right)\frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 4x(4dx)$$

$$= \frac{\pi}{4}x\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{4}sen2x\Big|_0^\pi + \frac{\pi}{8}x\Big|_0^\pi + \frac{\pi}{32}sen4x\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\pi}{4}(\pi) - 0 + \frac{\pi}{8}(\pi) + 0 = \frac{2\pi^2+\pi^2}{8} = \frac{3}{8}\pi^2 u^3$$

3. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar en el primer cuadrante el área limitada por la curva $y^2 = x^3$, $x = 1$, $x = 2$ y $y = 0$ al rotar alrededor del eje $x$.

***Solución***: Dando valores a $x$ se obtiene la figura 7.6:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.35 |
| 1.0 | 1.00 |
| 1.5 | 1.84 |
| 2.0 | 2.83 |
| 2.5 | 3.95 |
| 3.0 | 5.20 |

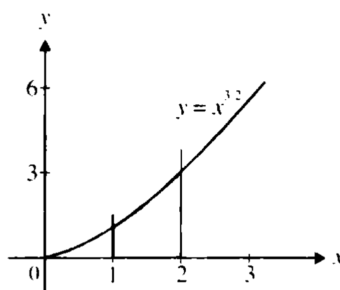



Figura 7.6

Cálculo del volumen:

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_1^2 \left(x^{3/2}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 x^3dx = \pi\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}(16) - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{15\pi}{4}u^3$$

4. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar el área comprendida entre la curva $y = e^x$, el eje $x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$, al rotarlas alrededor del eje $x$.

***Solución***: Dando valores a $x$ se obtiene el gráfico de la figura 7.7:

| x | y |
|---|---|
| -0.5 | 0.61 |
| 0 | 1.00 |
| 0.5 | 1.65 |
| 1.0 | 2.72 |
| 1.5 | 4.487 |
| 2.0 | 7.39 |

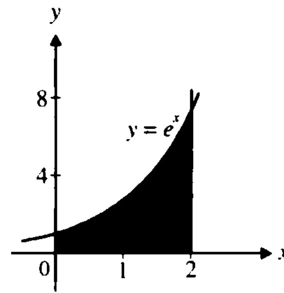



Figura 7.7

Cálculo del volumen:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$
$$= \pi \int_0^2 (e^x)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^2 e^{2x} dx$$
$$= \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^2$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[e^4 - e^0\right]$$
$$= \frac{\pi}{2}[54.59 - 1]$$
$$= \frac{53.59}{2}\pi$$

de donde $V = 26.795\ \pi\ u^3$.

5. Calcular el volumen del sólido de revolución limitado por la región comprendida entre $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ y $y = 0$, $y = 2$ al rotarla alrededor del eje $y$.

***Solución*:** Dando valores a $x$ se obtiene el gráfico de la figura 7.8.
Cálculo del volumen:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi\ u^3$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1.00 |
| 2 | 1.41 |
| 3 | 1.73 |
| 4 | 2.00 |
| 5 | 2.24 |

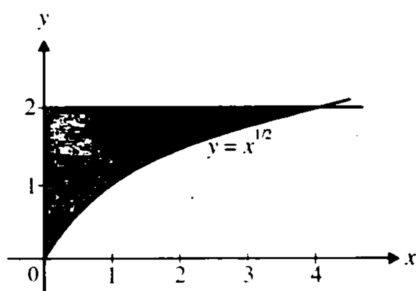



Figura 7.8

En algunas ocasiones, **para generar un volumen de un sólido de revolución, se rota alrededor de un eje paralelo** a uno de los ejes coordenados, procediendo entonces a su cálculo, como lo indicamos en el siguiente ejemplo:

6. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área limitada por la curva $y = 2x - x^2$ y el eje $x$ al rotarla alrededor del eje $y = 3$.

   ***Solución***: Los puntos de intersección de la curva con el eje $x$, se obtienen haciendo $y = 0$, obteniéndose las raíces $x = 0$ y $x = 2$.

   Dando valores a $x$ se obtiene la figura 7.9:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

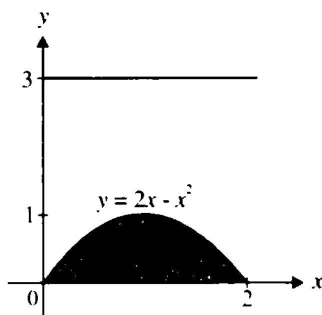



Figura 7.9

Cálculo del volumen:

$$V = \pi\int_0^2\left[3^2 - (3-y)^2\right]dx = \pi\int_0^2\left[9 - (3-(2x-x^2))^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^2\left[9 - 9 + 6(2x-x^2) - (2x-x^2)^2\right]dx = \pi\int_0^2\left[12x - 6x^2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4\right]dx$$

$$= \pi\left(6x^2 - \frac{10x^3}{3} + \frac{4x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi\left[24 - \frac{80}{3} + 16 - \frac{32}{5}\right]$$

$$= \pi\left[40 - \frac{80}{3} - \frac{32}{5}\right] = \frac{104}{15}\pi\ u^3$$

*Ejercicios 7.2*

Rotar el área indicada alrededor del eje dado para calcular el volumen del sólido de revolución:

1. $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ $x = 4$, $y = 0$, alrededor del eje $x$
2. $y = \cos x$, $x = 0$ $x = \pi/4$, $y = 0$, alrededor del eje $x$
3. $y = \ln(x+1)$, $x = 0$ $x = 4$, $y = 0$, alrededor del eje $x$
4. $x = y^2$, $y = 0$ $y = 1$, $x = 0$, alrededor del eje $y$
5. $x = e^{-y} + 2$, $y = 0$ $y = 3$, $x = 0$, alrededor del eje $y$
6. $x = \sqrt{y}e^{-y}$, $y = 0$ $y = 2$, $x = 0$, alrededor del eje $y$
7. $y = x^2 + 1$, $x = 0$ $x = 2$, $y = 0$, alrededor del eje $y = 5$
8. $(x-3)^2 - 3y = 0$, $x = 3$ $x = 6$, $y = 0$, alrededor del eje $x = 8$

## 7.3 MÉTODO DE ARANDELAS

Cuando calculamos el volumen de un sólido de revolución generado al rotar el área comprendida entre dos curvas alrededor del eje de revolución, podríamos calcularlo obteniendo el **volumen mayor** (más lejano del eje) **menos el volumen menor** (más cercano al eje) como se indica en la figura 7.10.

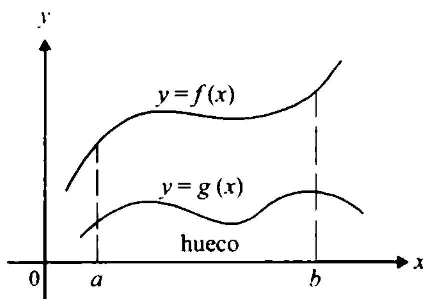



Figura 7.10

Observamos en la figura 7.10 que se presenta un hueco al realizar esta diferencia de volúmenes, por lo que a este método se le conoce como método de Arandelas

(o de rondanas), y su cálculo lo podemos realizar por medio de una sola expresión de la siguiente manera:

$$V = V_L - V_C = \pi \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

donde: $V_L$ = la más lejana y $V_C$ = la más cercana

De manera similar, al rotar alrededor del eje y, el volumen es

$$V = V_L - V_C = \pi \int_a^b \{ [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \} dy$$

***Ejemplos 7.3***

7. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área comprendida entre las curvas $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 - 3$ y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ al rotarla alrededor del eje $x$.

   ***Solución***: Tabulamos y obtenemos el área de su gráfico (figura 7.11):

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 1 |
| 3 | 9 | 6 |
| 4 | 16 | 13 |

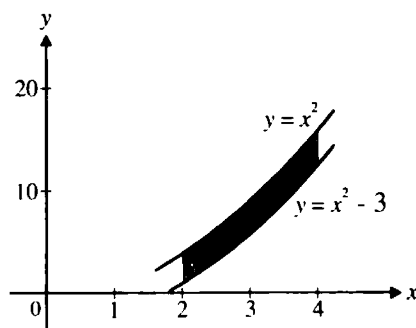



Figura 7.11

   Cálculo del volumen:

$$V = \pi \int_a^b \left[ (y_L)^2 - (y_C)^2 \right] dx = \pi \int_2^4 \left[ (x^2)^2 - (x^2 - 3)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_2^4 \left[ (x^4) - (x^4 - 6x^2 + 9) \right] dx = \pi \int_2^4 (6x^2 - 9) dx = \pi \left[ \frac{6x^3}{3} - 9x \right]_2^4$$

$$= \pi[(128 - 36) - (16 - 18)] = 94\pi \ u^3$$

8. Encuentre el volumen del sólido de revolución, generado al girar el área comprendida entre las curvas $y_1 = x^2$ y $y_2 = 8x - x^2$ al rotarlas alrededor del eje $x$.

   ***Solución***: Los puntos de intersección se obtienen igualando $y_1$ con $y_2$, y $x^2 = 8x - x^2$, de donde se obtienen las raíces $x = 0$ y $x = 4$.

   Dando valores se obtiene el gráfico de la figura 7.12:

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 7 |
| 2 | 4 | 12 |
| 3 | 9 | 15 |
| 4 | 16 | 16 |

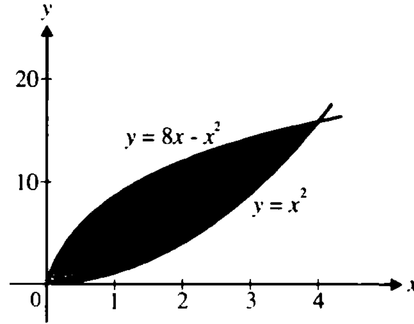



Figura 7.12

$$V = \pi\int_0^4 \left(y_2^{\,2} - y_1^{\,2}\right)dx = \pi\int_0^4 \left[\left(8x - x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^4 \left[\left(64x^2 - 16x^3 + x^4\right) - x^4\right]dx$$

$$= \pi\int_0^4 \left(64x^2 - 16x^3\right)dx = \pi\left[\frac{64x^3}{3} - \frac{16x^4}{4}\right]_0^4$$

$$= \pi\left[\frac{64x^3}{3} - 4x^4\right]_0^4 = \pi\left[\frac{4096}{3} - 1024\right] = \frac{1024}{3}\pi\ u^3$$

9. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar, alrededor del eje $y$, el área comprendida entre las curvas

$$y_1 = \sqrt{x} \ \text{ y } \ y_2 = \frac{x}{2}$$

***Solución***: Igualando $y_1$ y $y_2$ se obtiene las raíces $x = 0$ y $x = 4$ (figura 7.13):

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1.00 | 0.5 |
| 2 | 1.41 | 1.0 |
| 3 | 1.73 | 1.5 |
| 4 | 2.00 | 2 |

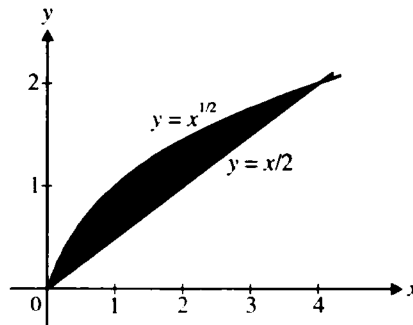



Figura 7.13

Rotando en el eje y, c=0 y d=2

$$V = \pi\int_0^2 \left[\left(x_2\right)^2 - \left(x_1\right)^2\right]dy = \pi\int_0^2 \left[\left(2y\right)^2 - \left(y^2\right)^2\right]dy$$

$$= \pi\int_0^2 \left(4y^2 - y^4\right)dy = \pi\left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right] = \frac{64}{15}\pi\ u^3$$

10. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar el área comprendida entre las curvas $x = y^3$, $-x^2 + y = 0$ alrededor del eje $x$.

***Solución***: $y_1 = \sqrt[3]{x}$, $y_2 = x^2$. Igualando $y_1$ y $y_2$ se obtiene $x = 0$ y $x = 1$

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.5 | 0.79 | 0.25 |
| 1.0 | 1.00 | 1.00 |

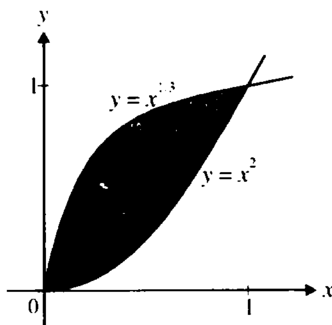



Figura 7.14

$$V = \pi \int_0^1 \left[ \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx = \pi \left[ \frac{3}{5} x^{5/3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{5} \pi \ u^3$$

11. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar, alrededor del eje $x$, el área comprendida entre las curvas

$$y_1 = x^{2/3} \text{ y } \sqrt{y_2} = x$$

***Solución***: Igualando $y_1$ con $y_2$ para encontrar los puntos de intersección, tenemos que los puntos de corte son $x = 0$ y $x = 1$

$$V = 2\pi \int_0^1 \left[ \left( x^{2/3} \right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx = 2\pi \int_0^1 \left( x^{4/3} - x^4 \right) dx = \frac{16}{35} \pi \ u^3$$

12. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área comprendida entre las curvas $y_1 = x^2$ y $x = y_2^{\,2}$ al rotarla alrededor del eje $x$.

***Solución***: Igualando las dos ecuaciones se obtiene $x = 0$ y $x = 1$.

$$V = \pi \int_0^1 \left( y_2^{\,2} - y_1^{\,2} \right) dx = \pi \int_0^1 \left[ \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left( x - x^4 \right) dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{10} \pi \ u^3$$

***Ejercicios 7.3***

Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar el área indicada, alrededor del eje dado.

1. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{\frac{1}{x}}$, $y = 0$. Desde $x = 1$ hasta $x = 3$. Eje $x$.

2. $y_1 = 2x$, $y_2 = x^2$, $x = 0$. Eje $y$.
3. $y_1 = x^2$, $y_2 = \cos x$, 1er cuadrante. Desde $x = 0$ hasta $x = 0.82$. Eje $x$.
4. $y_1 = x$, $y_2 = -x^2 + 4$. Desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Eje $x$.
5. $y_1 = e^x - 1$, $y_2 = 4 - x$, $x = 0$. Eje $x$.
6. $x_1 = y^2$, $x_2 = 2 - y^2$, $x = 0$. Eje $y$.
7. $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{8x}$. Eje $y$.

## *7.4 MÉTODO DE CAPAS CILÍNDRICAS*

Sea una región limitada por la gráfica de la función $y = f(x) \geq 0$, el eje $x$ y el intervalo $[a,b]$, girada alrededor del eje $y$ (ver figura 7.1). Si esta región la rotamos alrededor del eje $y$ obtenemos un volumen.

Para trabajar con este método, subdividamos a este intervalo en $n$ subintervalos de igual tamaño tal que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En cada subintervalo escojamos un punto medio $r_i$ en $[x_{i-1}, x_i]$ y construyamos rectángulos cuya altura es $f(r_i)$ como se indica en la figura 7.15.

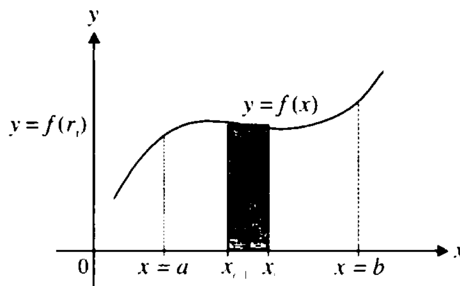



Figura 7.15

Al girar este pequeño rectángulo alrededor del eje $y$, se forma un cilindro hueco. Si cortáramos este cilindro y lo desdobláramos, obtendríamos una placa rectangular similar a la mostrada en la figura 7.16.

La longitud de la lámina, que es la circunferencia de la capa cilíndrica, equivale a $2\pi$ radio $= 2\pi \cdot r_i$ y el volumen será:

$$\begin{aligned} V_i &= \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{grueso} \\ &= (2\pi \text{ radio}) \times \text{altura} \times \text{grueso} \\ &= (2\pi r_i) f(r_i) \Delta x \end{aligned}$$




Figura 7.16

Sumando estos valores podemos obtener una aproximación al volumen total.

$$V = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \quad r_i f(r_i)\Delta x_i$$

Tomando el límite cuando el número de subintervalos tienda a infinito $(n \to \infty)$ tenemos:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \quad r_i f(r_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi \, x \, f(x)dx$$

$$V = 2\pi \int_a^b x \quad f(x)dx$$

fórmula utilizada para calcular el volumen de un sólido de revolución que se genera al rotar la región limitada por $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$ al girarla alrededor del eje $y$.

De una manera análoga para calcular un volumen de un sólido de revolución generado por la región $x = g(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$, al girar alrededor del eje $x$ será:

$$V = 2\pi \int_c^d y \quad g(y)dy$$

De una manera análoga para calcular el volumen de un sólido de revolución generado por la región $x = g(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$ al girarla alrededor del eje $x$ será:

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y)dy$$

***Ejemplos 7.4***

13. Hallar el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región comprendida entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje $x$, al rotarla alrededor del eje $y$.

    ***Solución***: Los puntos de intersección de la curva con el eje $x$, los obtenemos haciendo en la ecuación $y = 0$, obteniéndose $x = 0$ y $x = 2$, y el volumen está dado por:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y)dy = 2\pi \int_a^b x(2x - x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \left[\frac{16}{3} - 4\right] = \frac{8}{3}\pi \quad u^3$$

14. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área limitada por $x=(y-1)^2$, $x=0$, $x=1$ y el eje $x$ al rotarla alrededor del eje $y$.

***Solución***: La ecuación puede expresarse como $y=\sqrt{x}+1$. Graficando:

| $x$ | $y_1$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.5 | 1.71 |
| 1.0 | 2.00 |

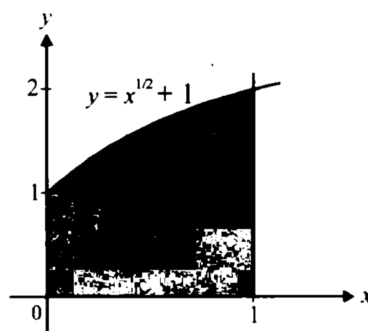



Figura 7.17

$$V=\int_0^1 2\pi x f(x)dx = 2\pi\int_0^1 x\left(\sqrt{x}+1\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^1 x^{3/2}dx + 2\pi\int_0^1 xdx = 2\pi\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{2x^{5/2}}{5}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right]=2\pi\frac{4+5}{10}=\frac{18}{10}\pi\ u^3$$

15. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área limitada por $y=4x^2$, $x=0$, $x=4$, $y=0$ al rotarla alrededor del eje $y$.

***Solución***:

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx = 2\pi\int_0^4 x\left(4x^2\right)dx = 2\pi\int_0^4 4x^3dx = 2\pi\frac{4x^4}{4}\bigg|_0^4$$

$$=2\pi x^4\Big|_0^4 = 512\pi\quad u^3$$

16. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área comprendida entre $x=y^{\frac{2}{3}}$, $y=0$, $y=3$, y el eje $y$ al rotarla alrededor del eje $x$.
***Solución***: (Ver figura 7.6):

$$V=2\pi\int_0^3 yg(y)dy = 2\pi\int_0^3 y\left(y^{\frac{2}{3}}\right)dy$$

$$=2\pi\int_0^3 y^{\frac{5}{3}}dy = 2\pi\frac{y^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}\Bigg|_0^3 = \frac{6}{8}\pi y^{\frac{8}{3}}\Bigg|_0^3$$

$$V = \frac{3}{4}\pi[18.72 - 0] = 14\pi \ u^3$$

17. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área limitada entre $y = e^{3x^2}$, $x = 0$, $x = 1$, y el eje $x$ al rotarla alrededor del eje $y$.

***Solución***: (Ver figura 7.7):

$$V = 2\pi \int_0^1 xf(x)dx = 2\pi \int_0^1 xe^{3x^2} dx$$

si $u = 3x^2$ y $du = 6xdx$,

$$V = \frac{\pi}{3} e^{3x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}\left[e^3 - e^0\right] = \frac{\pi}{3}[20 - 1] = \frac{19}{3}\pi \ u^3$$

18. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área limitada en el primer cuadrante por $x^2 = 4y$ y $y = 4$ alrededor del eje $x$.

***Solución***:

$$V = 2\pi \int_0^4 yg(y)dy = 2\pi \int_0^4 y\left(2\sqrt{y}\right)dy = 2\pi \int_0^4 2y^{3/2} dy = 4\pi \frac{y^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{8\pi}{5} y^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{8\pi}{5}[32 - 0] = \frac{256}{5}\pi \ u^3$$

## Ejercicios 7.4

En cada ejercicio calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar el área indicada al rotarla alrededor del eje indicado.

1) $y = 2x - x^2$, eje $x$. Alrededor del eje $y$.
2) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, eje $x$. Alrededor del eje $y$.
3) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/2$, eje $x$. Alrededor del eje $y$.
4) $y = e^{\frac{1}{2}x} + 3$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. Alrededor del eje $y$.
   $y = \ln(x + 1)$, $x = 1$, $x = 5$, eje $x$. Alrededor del eje $y$.
5) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, 1er. Cuadrante. Alrededor del eje $y$.
6) $x = y\sqrt{1 + y^3}$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$. Alrededor del eje $x$.

# CAPÍTULO VIII

# LONGITUD DE ARCO

## 8.1 INTRODUCCIÓN

En muchos problemas de nuestra vida cotidiana necesitamos medir o calcular la distancia que existe entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la cual, la podemos obtener por medio de geometría elemental con la expresión:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sin embargo, no todas las veces esta distancia es tan sencilla de obtener, como por ejemplo en el diseño de un tramo de carretera, la cual nos indica que debemos de rodear un río, una montaña o una diferencia de alturas con una gran pendiente. En este caso necesitamos obtener esta distancia a lo largo de la curva, llamando a esto *longitud de arco*.

## 8.2 DESARROLLO

Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, como se muestra en la figura 8.1. Dividamos a este intervalo $[a,b]$ en $n$ subintervalos, de tal forma que $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$ (figura 8.2), y calculemos la longitud de cada una de las cuerdas que se forman por ejemplo del punto $(x_{i-1}, y_{i-1})$ al punto $(x_i, y_i)$.

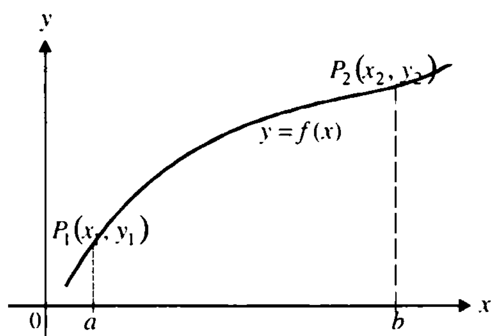



Figura 8.1

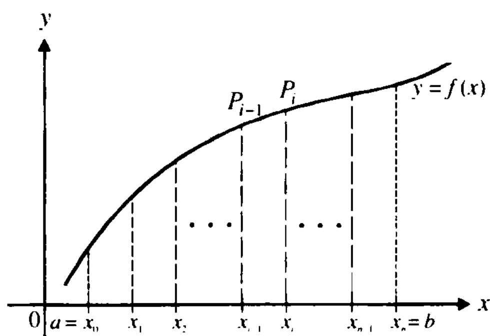



Figura 8.2

$$d(p_{i-1}, p_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$
$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \qquad (1)$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio del Calculo Diferencial que dice:

Si una función $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a,b)$, entonces existe un número $c$ en $(a,b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$d(p_i - p_{i-1}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c)(x_i - x_{i-1})]^2}$$

factorizando:

$$d(p_i - p_{i-1}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 (1 + [f'(c)]^2)}$$

si llamamos $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, tenemos:

$$d(p_i - p_{i-1}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 (1 + [f'(c)]^2)}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(c)]^2}\, \Delta x_i$$

Si subdividimos más este intervalo original de forma que el número de subintervalos tienda a infinito y sumamos las anteriores longitudes de arco ($L.A.$) tendremos:

$$L.A = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i$$

y si el límite existe cuando $n \to \infty$ podemos escribir:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

de donde la longitud de arco sobre el eje $x$ se obtiene por medio de:

$$Lx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

De una forma análoga la longitud de arco sobre del eje $y$ se obtiene por medio de:

$$Ly=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

## *Ejemplos 8.2*

1. Calcular la longitud de arco sobre la curva $y=(x+2)^{3/2}-3$ desde $x=2$ hasta $x=4$.

**Solución:**

$$y'=\frac{3}{2}(x+2)^{1/2}\ ,\ \ (y')^2=\frac{9}{4}(x+2)\ ,\ \ (y')^2+1=\frac{9}{4}(x+2)+1$$

$$(y')^2+1=\frac{9}{4}(x+2)+1=\frac{9x+18}{4}+\frac{4}{4}=\frac{9x+22}{4}$$

$$\sqrt{(y')^2+1}=\sqrt{\frac{9x+22}{4}}=\frac{1}{2}(9x+22)^{1/2}$$

$$Lx=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^4(9x+22)^{1/2}dx$$

si $u=9x+22$ y $du=9dx$

$$Lx=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{9}\int_2^4(9x+22)^{1/2}(9dx)=\frac{1}{18}\frac{(9x+22)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^4=\frac{2}{54}(9x+22)^{3/2}\Bigg|_2^4$$

$$=\frac{1}{27}\left[(58)^{3/2}-(40)^{3/2}\right]=\frac{18}{27}=6.99\,u$$

2. Calcular la longitud del arco de la función $x=\ln\sec y$, desde $y=0$ hasta $y=\pi/3$.

**Solución:**

$$x'=\frac{\sec y\tan y}{\sec y}=\tan y\ ,\ \ (x')^2=\tan^2 y\ ,\ \ (x')^2+1=\tan^2 y+1=\sec^2 y$$

$$Ly=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int_0^{\pi/3}\sqrt{\sec^2 y}\,dy=\int_0^{\pi/3}\sec y\,dy=\ln|\sec y+\tan y|\Big|_0^{\pi/3}$$

$$=\ln\left|\sec\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}\right|-\ln|\sec 0+\tan 0|=\ln|2+1.732|-\ln|1+0|$$

$$=\ln|3.732|-\ln|1|=1.3169u$$

3. Calcular la longitud de arco sobre la curva $x = y^{3/2}$ desde $A(0,0)$ hasta $B(8,4)$.

***Solución***:

$$x' = \frac{3}{2}y^{1/2}\ ,\quad (x')^2 = \frac{9}{4}y\ ,\qquad (x')^2 + 1 = \frac{9}{4}y + \frac{4}{4} = \frac{9y+4}{4}$$

$$Ly = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_0^4 \sqrt{\frac{9y+4}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^4 (9y+4)^{1/2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{9}\int_0^4 (9y+4)^{1/2}\,9dy$$

$$= \frac{1}{18}\frac{(9y+4)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{54}(9y+4)^{3/2}\Big|_0^4 \frac{1}{27}\left[(40)^{3/2} - 8\right] = 9.35u$$

4. Calcular la longitud de arco de la función $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

***Solución***:

$$y' = \frac{1}{x}\ ,\quad (y')^2 = \frac{1}{x^2}\ ,\quad (y')^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$Lx = \int_b^a \sqrt{(y')^2 + 1}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = I$$

Realizando un cambio de variable trigonométrico, tenemos:

$$\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2u^2} \Rightarrow u = \frac{a}{b}\tan z$$

donde:

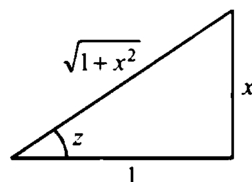
$$a^2 = 1 \qquad a = 1$$

$$b^2 = 1 \qquad b = 1$$

$$u^2 = x^2 \qquad u = x$$

$$x = \frac{1}{1}\tan z\ ,\ dx = \sec^2 z dz\ ,\ \ \frac{x}{1} = \tan z$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1} = \sec z\ ,\quad \sec z = \sqrt{1+x^2}$$




$$I = \int \frac{\sec z}{\tan z}\sec^2 z dz = \int \frac{\frac{1}{\cos z}}{\frac{sen z}{\cos z}}\sec^2 z dz = \int \frac{\sec^2 z}{sen\ \ z}dz = \int \frac{\tan^2 z + 1}{sen\ \ z}dz$$

$$= \int \frac{\frac{sen^2 z}{\cos^2 z}}{sen\ \ z}dz + \int \csc z dz \cos^{-2} z sen\ \ z dz + \int \csc z dz$$

$$= \int \cos^{-2} z sen\ \ z dz + \int \csc z dz = \frac{1}{\cos z} + \ln\left|\csc z - \cot z\right|$$

$$I = \sec z + \ln\left|\csc z - \cot z\right| = 0.1043$$

5. Calcular la longitud de arco de la función: $y = x^2$ desde $A(0,0)$ hasta $B(2,4)$.

***Solución***:

$$y' = 2x \;,\; (y')^2 = 4x^2 ,\; (y')^2 + 1 = 4x^2 + 1$$

$$Lx = \int_0^2 \sqrt{4x^2+1}\,dx = I$$

Haciendo:

$u^2 = 4x^2 \qquad u = 2x \qquad du = 2dx$

$a^2 = 1 \qquad a = 1$

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{4x^2+1}\,(2dx)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x)\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{2}(1)\ln\left\{2x + \sqrt{4x^2+1}\right\}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}(2)\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left\{(2)(2) + \sqrt{17}\right\} - 0 + \frac{1}{4}\ln\left[2(0) + \sqrt{1}\right]$$

$$= \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left[4 + \sqrt{17}\right] = 4.6466$$

6. Calcular la longitud de arco de la función $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ desde $x = 0$ hasta $x = a$.

***Solución***:

$$y' = \frac{1}{2}a\left[e^{x/a}\frac{1}{a} - e^{-x/a}\frac{1}{a}\right] = \frac{1}{2}a\left[\frac{1}{a}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$(y')^2 + 1 = \frac{1}{4}\left[e^{2x/a} - 2 + 4 + e^{-2x/a}\right] = \frac{1}{4}\left[e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right] = \frac{1}{4}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2$$

$$Lx=\int_0^a\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a e^{x/a}dx+\frac{1}{2}\int e^{-x/a}dx=\frac{1}{2}a\int_0^a e^{x/a}\frac{1}{a}dx-\frac{1}{2}a\int_0^a e^{-x/a}\left(-\frac{1}{a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}ae^{x/a}\Big|_0^a-\frac{1}{2}ae^{-x/a}\Big|_0^a=\frac{1}{2}a(e-1)-\frac{1}{2}a\left(e^{-1}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}ae-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}ae^{-1}+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}ae-\frac{1}{2}\frac{a}{e}u$$

7. Calcular la longitud de arco de la función $x+5=4y^{3/2}+2$ desde $y=2$ hasta $y=5$.

***Solución:***

$$x=4y^{3/2}-3\ ,\quad x'=\frac{12}{2}y^{1/2}=6y^{1/2}\ ,\quad (x')^2=36y\ ,\quad (x')^2+1=36y+1$$

$$Ly=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\int_2^5\sqrt{36y+1}\,dy=I$$

Si $u=36y+1$ y $du=36dy$ y completando la integral, tenemos:

$$I=\frac{1}{36}\int_2^5\sqrt{36y+1}(36dy)=\frac{1}{36}\frac{(36y+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^5=\frac{2}{108}(36y+1)^{3/2}\Big|_2^5$$

$$=\frac{1}{54}\left[(181)^{3/2}-(73)^{3/2}\right]=\frac{1}{54}[2435-555.9]$$

$$=\frac{1}{54}[2435-623.7]=33.54u$$

***<u>Ejercicios 8</u>***

Calcular la longitud de arco indicada:

1. $y=x^2+3$, de $A(1,4)$ a $(2,7)$
2. $x=\sqrt{4y^2}$, de $y=2$ a $y=4$
3. $x=\dfrac{y^4-2y}{y-2}$, de $y=1$ a $y=3$
4. $y=\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{1}{4x^2}$, de $x=1$ a $x=3$
5. $(y+4)^2=(x+2)^2$ de $A(2,0)$ a $B(4,2)$
6. $y=\ln\left(sen\ \ x\right)$, de $x=\dfrac{\pi}{6}$ a $x=\dfrac{\pi}{3}$
7. $y=\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{1}{2x^2}$, de $A\left(\dfrac{9}{8},-2\right)$ a $B\left(\dfrac{9}{16},-1\right)$
8. $x^2=4y^3$, de $y=1$ a $y=8$

# CAPÍTULO IX

# ÁREA DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

## *9.1 INTRODUCCIÓN*

El área de una superficie de un sólido de revolución es la cubierta de un volumen de sólido de revolución, es decir, solamente la parte exterior del volumen.

Para calcular el área de superficie de revolución consideremos primero un cono circular cuya base de radio es $r$ y su apotema $l$ como se indica en la figura 9.1.

Esta región es el área bajo la curva limitada por unas rectas y rotada inicialmente sobre algún eje coordenado. Si cortamos este cono tenemos la figura 9.2.

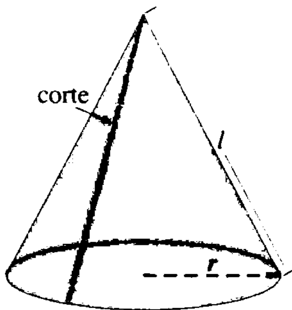



Figura 9.1

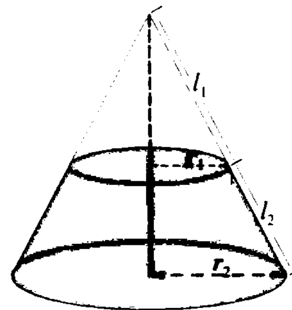



Figura 9.2

El área lateral del cono truncado es: $A = \pi\, r_2(l_1 + l) - \pi\, r_1\, l_1$, si hacemos:

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \text{ (radio promedio del cono truncado)}$$

$$A = 2\pi\, rl \qquad (1)$$

Ahora consideremos una función $y = f(x)$ continua, positiva y derivable en $[a,b]$ que gira con respecto al eje $x$.

Para obtener el área de superficie, dividamos el intervalo en pequeños subintervalos tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ y consideremos un punto $x_i$ dentro del intervalo tal que $y_i = f(x_i)$.

Tomemos un segmento de la recta limitado por dos puntos $P_{i-1}$ y $P_i$, hagámoslo girar alrededor del eje $x$. Esto nos da como resultado el área extendida de un cono

cuyo apotema es $l = P_{i-1}, P_i$ y cuyo radio es el promedio de:

$$r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

si esto lo sustituimos en (1), tenemos:

$$A = 2\pi\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right) |P_{i-1}, P_i \qquad (2)$$

Pero

$$|P_{i-1}, P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ vemos que existe un punto $x_k$ en este intervalo, tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_k)\ (x_i - x_{i-1})$$
$$\Delta y_i = f'(x_k)\ \Delta x_i$$

y entonces:

$$|P_{i-1}, P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(x_k)\Delta x_i]^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}$$

sustituyendo en (2), tenemos:

$$A = 2\pi\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right)\sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\,\Delta x_i$$

Cuando $A_x$ es muy pequeña $y = f(x_i) = f(x_k)$igual que $y_{i-1} = f(x_{i-1}) = f(x_k)$, entonces:

$$\frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \frac{f(x_k) + f(x_k)}{2} = f(x_k)$$
$$A = 2\pi f(x_k)\sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\,\Delta x$$
$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k)\sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\,\Delta x$$

Haciendo que el tamaño de la partición ($P$) tienda a cero y sumando estas áreas, tenemos:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k)\sqrt{1+[f'(x_k)]^2}\Delta x = \int_a^b 2\pi f(x_k)\sqrt{1+[f'(x_k)]^2}dx$$

## *9.2 DEFINICIONES*

Si tenemos una función positiva $y = f(x)$, cuya derivada está definida y continua en el intervalo $[a,b]$ y **se gira alrededor del eje *x***, se tiene la siguiente fórmula:

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x_k)]^2}dx$$

De una manera análoga se demuestra que si tenemos una función $x = g(y)$ continua y derivable en el intervalo $c \leq y \leq d$ **y se hace rotar alrededor del eje *y***, el área de la superficie de revolución se puede obtener por medio de la fórmula:

$$S_y = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy$$

Sin demostrar podemos decir que si se rota una función $y = f(x)$ continua y derivable en el intervalo cerrado $[a,b]$ **alrededor del eje *y*,** su área de superficie de revolución se obtiene por medio de la expresión:

$$S_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Si se rota una función $x = g(y)$ continua y derivable en el intervalo cerrado $[c,d]$, **alrededor del eje *x*,** su área de superficie de revolución se obtiene por medio de la expresión:

$$S_x = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy$$

***Ejemplos 9***

1. Calcular el área de la superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x$ la curva $y = \sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

   ***Solución***: $y = x^{\frac{1}{2}}$,

$$y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2x^{1/2}}\ ,\ (y')^2=\frac{1}{4x}\ ,\ (y')^2+1=\frac{1}{4x}+1=\frac{1+4x}{4x}$$

$$S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{\frac{1+4x}{4x}}dx$$

$$=\frac{2\pi}{2}\int_0^1\sqrt{x}\frac{\sqrt{1+4x}}{\sqrt{x}}dx=\pi\int_0^1(1+4x)^{1/2}dx$$

Si $u=1+4x$ y $du=4dx$, y completando la integral tenemos:

$$S_x=\frac{\pi}{4}\frac{(1+4x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\int_0^1(1+4x)^{1/2}(4dx)=\frac{\pi}{6}(1+4x)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[(5)^{3/2}-(1)^{3/2}\right]=\frac{\pi}{6}[11.18-1]=\frac{\pi}{6}[10.18]\ u^2$$

2. Calcular el área de la superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x$ la curva $y=e^x$, desde $x=2$ hasta $x=4$.

***Solución***:

$$y'=e^x\ ,\ (y')^2=(e^x)^2=e^{2x}\ ,\ (y')^2+1=e^{2x}+1$$

$$S_x=2\pi\int_2^4 e^x\sqrt{e^{2x}+1}\,dx$$

Haciendo:

$a^2=1$ $\qquad a=1$

$u^2=e^{2x}$ $\qquad u=e^x$ , $du=e^x dx$ y utilizando $\int\sqrt{u^2+a^2}du$ , se tiene:

$$S_x=2\pi\left[\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^{2x}+1}+\frac{1}{2}(1)\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)\right]_2^4$$

$$=2\pi\left\{\left[\frac{1}{2}e^4\sqrt{e^8+1}+\frac{1}{2}\ln\left(e^4+\sqrt{e^8+1}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}e^2\sqrt{e^4+1}+\frac{1}{2}\ln\left(e^2+\sqrt{e^4+1}\right)\right]\right\}$$

$$=2\pi\left\{\left[\frac{1}{2}(54.60)(54.60)+\frac{1}{2}\ln(54.6+54.6)\right]-\left[\frac{1}{2}(7.39)(7.45)+\frac{1}{2}\ln(7.39+54.6)\right]\right\}$$

$$S_x=2\pi[1490+2.346]-2\pi[27.52+2.063]$$

$$=2\pi[1492.34-29.58]=2925.52\pi\ \ u^2$$

3. Calcular el área de superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $y$ la curva $x=2\sqrt{y+1}$, desde el punto $A(2,0)$ hasta el punto $B(4,3)$.

***Solución***: $x=2(y+1)^{1/2}$,

$$x' = 2\frac{1}{2}(y+1)^{-1/2}\ ,\ (x')^2 = \frac{1}{y+1}\ ,\ (x')^2 + 1 = \frac{1}{y+1} + 1 = \frac{1+y+1}{y+1} = \frac{y+2}{y+1}$$

$$S_y = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = 2\pi\int_0^3 \sqrt{y+1}\sqrt{\frac{y+2}{y+1}}\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^3 \sqrt{y+1}\,\frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+1}}\,dy = 2\pi\int_0^3 (y+2)^{1/2}dy$$

Si $u = y+2$ y $du = dy$,

$$S_y = 2\pi\frac{(y+2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^3 = \frac{4\pi(y+2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{4}{3}\pi\left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi(11.8 - 2.828) = 11.96\pi \quad u^2$$

4. Calcular el área de la superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x$ la curva $y = \sqrt{4-x^2}$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

***Solución***: $y = \left(4-x^2\right)^{1/2}$,

$$y' = \frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\ ,\ (y')^2 = \frac{x^2}{4-x^2}$$

$$(y')^2 + 1 = \frac{x^2}{4-x^2} + 1 = \frac{x^2+4-x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^2 dx = 4\pi x\,\Big|_0^2 = 4\pi[2-0] = 8\pi \quad u^2$$

5. Calcular el área de la superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x$ la curva $y = x^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

***Solución***:

$$y' = 3x^2\ ,\ (y')^2 = 9x^4\ ,\ (y')^2 + 1 = 9x^4 + 1$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{9x^4+1}\,dx$$

Haciendo $u = 9x^4 + 1$, $du = 36x^3dx$ y completando la integral, tenemos:

$$S_x = \frac{2\pi}{36}\int_0^1 (9x^4+1)^{1/2}(36x^3dx) = \frac{\pi}{18}\left.\frac{(9x^4+1)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{27}(9x^4+1)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{27}[31.61-1] = \frac{30.61}{27}\pi = 1.134\pi \quad u^2$$

6. Calcular el área de la superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x$ la curva $y^2 + 4x = 2\ln y$, desde $y = 2$ hasta $y = 4$.

***Solución***: $4x = 2\ln y - y^2$,

$$x = \frac{2\ln y - y^2}{4} = \frac{\ln y}{2} - \frac{y^2}{4} \quad , \quad x' = \frac{1}{2y} - \frac{2y}{4} = \frac{1}{2y} - \frac{y}{2}$$

$$(x')^2 = \frac{1}{4y^2} - 2\left(\frac{1}{2y}\right)\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{2} + \frac{y^2}{4}$$

$$(x')^2 + 1 = \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{2} + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{1}{2y^2} + \frac{y}{2}\right)^2$$

$$S = 2\pi\int_2^4 y\sqrt{\left(\frac{1}{2y^2} + \frac{y}{2}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_2^4 y\left(\frac{1}{2y^2} + \frac{y}{2}\right)dy$$

$$= 2\pi\int_2^4 \frac{dy}{y} + 2\pi\int_2^4 \frac{y^2}{2}dy = 2\pi\ln y + \frac{y^3}{3}\pi\Big|_3^4$$

$$= 2\pi[1.3863 - 1.0986] + \left[\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right] = 19.26\pi \quad u^2$$

7. Calcular el área de la superficie de revolución que se genera al rotar alrededor del eje $x$ la curva $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

***Solución***:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{4} \quad , \quad y' = \frac{3x^2}{3} - \frac{x^{-2}}{4} = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$(y')^2 = \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2 = x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}$$

$$(y')^2 + 1 = x^4 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{16x^4} = x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}\right)\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$

$$= 2\pi\int_0^1\left(\frac{x^5}{3}+\frac{x}{12}+\frac{x}{4}+\frac{1}{16x^3}\right)dx$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^5dx + \frac{2\pi}{12}\int_0^1 xdx + \frac{2\pi}{4}\int_0^1 xdx + \frac{2\pi}{16}\int_0^1 x^{-3}dx$$

$$= \frac{2\pi}{3}\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{6}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{\pi}{8}\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{16}(1) = \frac{110}{288}\pi \quad u^2$$

***Ejercicios 9***

Calcular el área de superficie del sólido de revolución generada al rotar el área indicada alrededor del eje indicado.

1. $y^2 = 4x+4$ $\quad 0 \le x \le 4$ $\quad$ eje $x$
2. $x = \sqrt{4-y^2}$ $\quad 0 \le y \le 2$ $\quad$ eje $y$
3. $x = e^{3y}$ $\quad 0 \le y \le 1$ $\quad$ eje $y$
4. $y = \sqrt{r^2-x^2}$ $\quad 0 \le x \le 1$ $\quad$ eje $x$
5. $y = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3$ $\quad 0 \le x \le 1$ $\quad$ eje $x$
6. $y = \sqrt{2x-x^2}$ $\quad 0 \le x \le 2$ $\quad$ eje $x$
7. $x = 1-y^2$ $\quad 0 \le x \le 1$ $\quad$ eje $y$

# CAPÍTULO X

# FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

## *10.1 FUNCIONES REALES DE DOS O MÁS VARIABLES*

En este capítulo se considerarán funciones reales de dos o más variables.

El dominio de una función de $n$ variables, es el conjunto de puntos en $\Re^n$, y el contradominio es un conjunto de números reales.

En $\Re^1$ tenemos una función de una variable cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\Re^1$, o sea un conjunto de números reales y el contradominio es un conjunto de números reales.

En $\Re^2$ tenemos una función de dos variables cuyo dominio es un conjunto de pares ordenados de números reales $(x,y)$.

Una ecuación de la forma $z=f(x,y)$ define una función de dos variables independientes, si para cada $(x,y)$ de números reales en el dominio de $f$, existe uno y solo un número real $z$ que satisface la ecuación $z=f(x,y)$.

También una ecuación de la forma $w=f(x,y,z)$ define una función de tres variables independientes.

En este capítulo se trabajará con funciones de dos variables independientes.

***Ejemplos 10.1***

1. Sea la función de dos variables $x$ y $y$ tal que $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$. Encontrar su dominio.

   ***Solución***: El dominio de $f$ es el conjunto $\{(x,y)\ x^2+y^2\leq 16\}$. Este es el conjunto de puntos en el plano $xy$ de la circunferencia $x^2+y^2=16$ y en su región interior (figura 10.1).

2. Sea $f$ la función dada por $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. Encontrar: **a**) $f(2,-2)$, **b**) $f(-2,1)$.

   ***Solución***:

$$f(2,-2)=\sqrt{9-2^2-(-2)^2}=\sqrt{9-4-4}=1$$

$$f(-2,1)=\sqrt{9-(-2)^2-1^2}=2$$

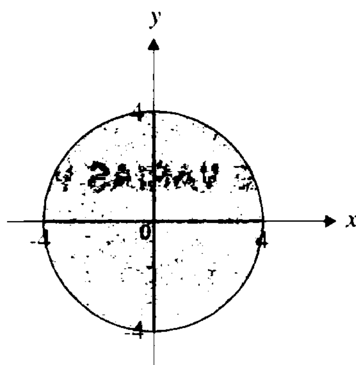



Fig. 10.1

3. Sea la función $h$ definida por $h(x,y,z)=x^4-10yz^3$. Encontrar: **a**) $g(1,2,-1)$, **b**) $g(i,j,k)$

***Solución*:**

**a)** $g(1,2,-1)=1^4-10(2)(-1)^3=21$
**b)** $g(i,j,k)=i^4-10jk^3$

**Definición**
Si $f$ es una función de dos variables, entonces la gráfica de $f$ es el conjunto de todos los puntos $(x,y,z)$ en $\Re^3$, donde $(x,y)$ es un punto del dominio de $f$, y $z=f(x,y)$.

La gráfica de una función de dos variables es una superficie, la cual consta de todos los puntos en el espacio tridimensional con coordenadas $(x,y,z)$ de números reales.

Así la función del ejemplo 1., $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, tiene como gráfico el hemisferio arriba y abajo del plano $xy$ con un radio de 4 unidades y centro en el origen. Ver figura 10.2.

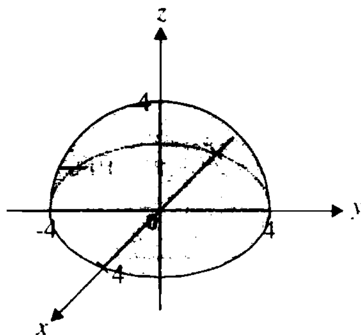



Figura 10.2

*Ejemplo 10.1*

4. Trazar la gráfica de la función $g(x, y) = x^2 + y^2$.

**Solución**: La gráfica de $g$ es una superficie cuya ecuación es $z = x^2 + y^2$. La gráfica en el plano $xy$ se obtiene si $z = 0$ o sea $x^2 + y^2 = 0$, que es el origen.

Los planos $xz$ y $yz$ se determinan si $y = 0$ y $x = 0$ en la ecuación $z = x^2 + y^2$, obteniendo $z = x^2$ y $z = y^2$ (ver figura 10.3).

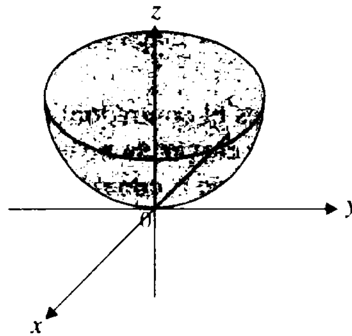



Figura 10.3

Una **Función polinomial** de dos variables $x$ y $y$, es una función tal que $f(x, y)$ es la suma de los términos de la forma $cx^n y^m$ donde $c$ es un número real y $n$ y $m$ son enteros no negativos.

El **grado** de una función polinomial está determinado por la suma mayor de los exponentes $x$ y $y$ que aparezcan en cualquier término, por ejemplo:

$$f(x, y) = 3x^3y^2 + 8xy^3 + 2xy - 3x^2 + y$$

es una función polinomial de grado 5.

**Una Función Racional** de dos variables es una función del tipo

$$h(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

donde $f$ y $g$ son funciones polinomiales. Por ejemplo la función dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x^4 + y^4}$$

es una función racional.

*CURVAS DE NIVEL*

Otra forma de representar una superficie no conocida geométricamente.

Suponer que la superficie $z = f(x, y)$ se corta con el plano $z = k$, y la curva intersectada se proyecta sobre el plano $xy$. Esta curva proyectada tiene por ecuación $f(x, y) = k$ que se llama **contorno** o **curva de nivel** de la función en el punto $k$.

Cada punto de la curva de nivel, corresponde a un único punto en la superficie $k$ unidades arriba si $k > 0$ o $k$ unidades abajo si $k < 0$.

De los diferentes valores para la constante $k$ se obtiene un conjunto de curvas de nivel llamado **Mapa de Contornos** o de relieve.

Cada curva de nivel $f(x, y) = k$ en el mapa de contorno son los puntos $(x, y)$ en el dominio de la función.

Todos los valores posibles de $k$, es el contradominio de la función. A saber, para la función dada en el ejemplo 10.4 las curvas de nivel son circunferencias con centreo en el origen, para los diferentes valores de $z$, como se muestra en la figura 10.4.

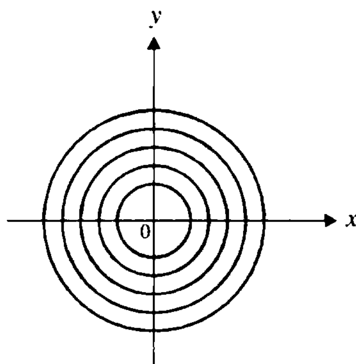



Figura 10.4

<u>***Ejemplos 10.1***</u>

5. Dada la función $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, describa la curva de nivel y el mapa de contorno.

***Solución***: Si $f(x, y) = c$, elevando al cuadrado se tiene:

$$c^2 = 25 - x^2 - y^2, \text{ de donde:}$$
$$25 - c^2 = x^2 + y^2, \quad c^2 \le 25 \;, \quad c \in [-5{,}5]$$

La representación gráfica se tiene en la figura 10.5.

6. Dada la función $z = f(x, y) = xy$, describa las curvas de nivel y el mapa de contorno.

***Solución***: Para $z = 0$, la curva de nivel es el origen.

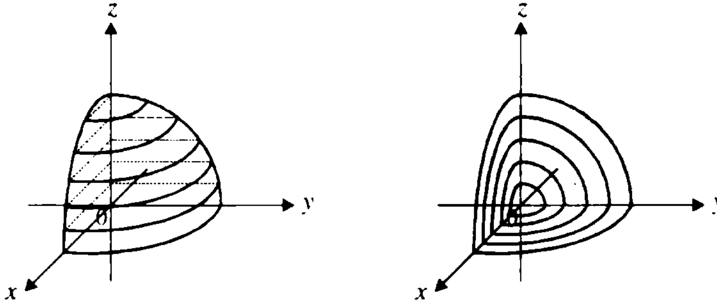



Fig. 10.5

Para $z=1$, se tiene $1=xy$, donde $y=\frac{1}{x}$.

Para $z=4$, se tiene $4=xy$; $y=\frac{4}{x}$.

Para $z=-1$, se tiene $-1=xy$, $y=-\frac{1}{x}$.

Para $z=-4$, se tiene $-4=xy$, $y=-\frac{4}{x}$.

Las hipérbolas obtenidas se ven en la figura 10.6.

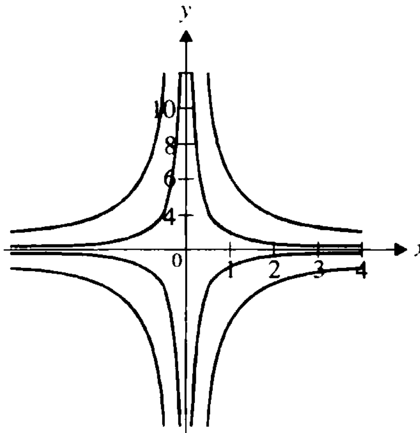



Figura 10.6

## Ejercicios 10.1

1. Dada la función $f(x,y)=x^3+2y-8$ evaluar:

   **a)** $f(-1,4)$, **b)** $f(4a,b)$, **c)** $f(a,a^2)$ y **d)** $f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)$

2. Dada la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$ evaluar:
   **a)** $f(8,1)$, **b)** $f(r^2,5)$ y **c)** $f(x,-y)+f(x,y^2)$
3. Sea $h(x,y)=x^2 seny$ evaluar:
   **a)** $h(0,0)$, **b)** $h(\pi,0)$ y **c)** $h(2,2\pi)$
4. Encuentre el dominio de las siguientes funciones.
   **a)** $g(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$
   **b)** $h(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$
   **c)** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-2}$
   **d)** $h(x,y)=\cos^{-1}(x-y)$
   **e)** $f(x,y)=\sqrt{x+y}$
5. Dibuje un mapa de relieve, mostrando las curvas de nivel para los valores dados.
   **a)** $f(x,y)=2x^2+2y^2$, en 0, 1, 3, 9
   **b)** $g(x,y)=9-x^2-y^2$, en 0, 3, -3
   **c)** $h(x,y)=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$, en 0, 2, 4, 6
   **d)** $z=\dfrac{x}{y}$, en -2, -1, 0, 1, 2

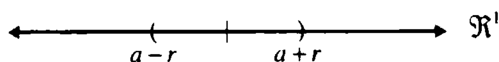
## *10.2 LÍMITES DE FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE*

Se recuerda que en $\Re^1$, la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de dos números reales y se denota por $|x-a|$.

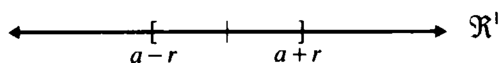
Ahora, si $a$ es un punto en $\Re^1$ se le llama "bola abierta" denotada por $B(a,r)$ al conjunto de todos los puntos $x$ en $\Re'$ tal que $|x-a|<r$.

Por otro lado, por la definición de valor absoluto, el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $|x-a|<r$ es el intervalo abierto $(a-r,a+r)$.

Gráficamente:




De la misma manera, se puede decir que la bola cerrada denotada como $B[a,r]$ en $\Re$, es el intervalo cerrado $[a-r,a+r]$. Gráficamente:




Si $(x',y')$ es un punto en $\Re^2$ se le llama "bola abierta", denotada por $B((x',y'),r)$ al conjunto de puntos $(x,y)$ en $\Re^2$ tal que:

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<r$$

Gráficamente se verían todos los puntos en la región interior limitada por la circunferencia con centro $(x', y')$ y radio $r$, a la bola abierta también le llaman disco abierto (ver figura 10.7).

Análogamente se tiene la bola cerrada o disco cerrado denotada como $B[(x', y'), r]$ en $\Re^2$ (ver figura 10.8).

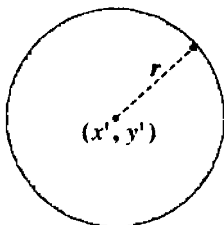



Figura 10.7

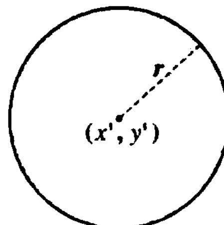



Figura 10.8

En $\Re^3$ se tiene una esfera o bola abierta con radio $r$ y centro en el punto $(x', y', z')$ denotada por $B(x', y', z', r)$, entendiendo el conjunto de puntos $(x, y, z)$ en $\Re^3$ tal que:

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}<r$$

Ahora se está en condiciones de definir el límite de una función de dos variables.

**Definición**

Sea $f$ una función de dos variables definida en algún disco abierto $B((x', y'), r)$ excepto, posiblemente, en el punto $(x', y')$. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(x',y')} f(x,y)=L$$

Si para cualquier $\varepsilon>0$, cantidad tan pequeña como se quiera, existe una $\delta>0$, tal que si

$$0<\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}<\delta, \text{ entonces } |f(x,y)-L<\varepsilon.$$

los teoremas de límites vistos en Cálculo Diferencial de una variable real, se generalizan para ser aplicados en funciones de más de una variable.

***Ejemplos 10.2***

7. $\lim_{(x,y)\mapsto(1,3)}\left(x^4+y^3\right)=1^4+3^3=28$

8. $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)}$
$=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}(x-y)=0-0=0$

9. $\lim_{(x,y)\mapsto(0,2)}\left(2x^2+3xy-5y^3\right)=2(0)^2+3(0)(2)-5(2)^3=-40$

Se puede continuar el análisis de los límites de funciones de dos variables, en vista de que en un plano coordenado hay una infinidad de curvas o trayectorias donde $(x,y)$ puede acercarse a $(x',y')$ y en el caso en que dos trayectorias se dirijan a un mismo punto $(x',y')$ y se obtengan dos límites diferentes, entonces

$$\lim_{(x,y)\mapsto(x',y')} f(x,y) \text{ no existe}$$

Para esto se necesita dar el concepto de punto de acumulación de un conjunto $A$ de puntos en $\Re^n$, y así, en la definición del límite de una función de dos variables el punto $(x,y)$ estaría restringido a un conjunto particular de puntos, pero este tema no está en el contenido programático que cubre este libro.

***Ejercicios 10.2***

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{(x,y)\mapsto(0,1)}\dfrac{\arccos\left(\frac{x}{y}\right)}{1+xy}$

2. $\lim_{(x,y)\mapsto(3,-1)}\dfrac{2x-4y}{x+2y}$

3. $\lim_{(s,t)\mapsto(0,0)}\dfrac{e^s+e^t}{sent+\cos s}$

4. $\lim_{(x,y)\mapsto(-2,3)}y\sqrt{x^3+3y}$

5. $\lim_{(x,y)\mapsto(3,1)}\sqrt{\dfrac{x+y^2}{x-y^3}}$

6. $\lim_{(x,y)\mapsto(3,-1)}\left(x^3+y^2-2x+3y\right)$

7. $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\dfrac{2e^x+e^y}{e^x+e^y}$

## 10.3 DERIVADAS PARCIALES

Para derivar una función de dos variables se mantiene una de ellas fija, surgiendo el concepto de derivar en forma parcial.

**Definición**

Derivada parcial de una función de dos variables.

Sea $f(x,y)$ una función. **La derivada parcial de $f$ con respecto a $x$** denotada por $f_x$, tal que su valor en cualquier punto en el dominio de $f$ es:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

si este límite existe.

Análogamente, cuando se mantiene $x$ fija. **La derivada parcial de $f$ con respecto a $y$** denotada por $f_y$ es:

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

si este límite existe.

Notaciones usuales para la diferenciación parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad D_x f,\quad D_y f,\quad f_x,\quad f_y,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Para derivar parcialmente, se puede:

- Utilizar la definición o
- Aplicar los teoremas para la diferenciación común.

En este libro se utilizará la diferenciación común.

***Ejemplos 10.3***

Dadas las siguientes funciones, obtener las derivadas parciales con respecto a $x$ y a $y$, respectivamente.

10. $f(x,y) = x^3 y + 4y^2$

***Solución***: Para calcular $f_x(x,y)$ se considera a $y$ como constante y se diferencia $f$ con respecto a $x$:

$$f_x(x,y) = 3x^2 y + 0 = 3x^2 y$$

Asímismo, para calcular $f_y(x,y)$ se considera a $x$ como constante y se diferencia $f$ con respecto a $y$:

$$f_y(x,y) = x^3(1) + 8y = x^3 + 8y$$

11. $f(x,y) = xy^2 + x^2y$

***Solución***:

$$f_x(x,y) = y^2 + 2xy$$
$$f_y(x,y) = 2xy + x^2$$

12. $f(x,y) = 2xy + e^{xy} + \frac{x}{2y}$

***Solución***:

$$f_x(x,y) = 2y + e^{xy}(y) + \frac{1}{2y} = 2y + ye^{xy} + \frac{1}{2y}$$

13. $f(x,y) = e^{xy^3} + \cos(x^2y) + 3x^2y^2$

***Solución***:

$$f_x(x,y) = e^{xy^3}y^3 - sen(x^2y)(2xy) + 6xy^2$$
$$= y^3e^{xy^3} - 2xysen(x^2y) + 6xy^2$$

$$f_y(x,y) = e^{xy^3}(3xy^2) - sen(x^2y)(x^2) + 6x^2y$$
$$= 3xy^2e^{xy^3} - x^2sen(x^2y) + 6x^2y$$

14. $f(x,y) = \frac{3x^4 + 2xy^3}{3x}$

***Solución***:

$$f_x = \frac{(3x)(12x^3 + 2y^3) - (3x^4 + 2xy^3)(3)}{(3x)^2}$$

Como $f(x,y) = \frac{3x^4 + 2xy^3}{3x}$, se tiene $f(x,y) = \frac{3x^4}{3x} + \frac{2xy^3}{3x} = x^3 + \frac{2}{3}y^3$, entonces:

$$f_y = \frac{2}{3} \cdot 3y^2 = 2y^2$$

15. $z = \frac{y^{3/2}}{y^{2/3}}$

***Solución***: $z = y^{5/6}$

$$z_x = 0 \ , \ z_y = \frac{5}{6}y^{-1/6}$$

16. $f(x,y) = x^2 \ln y + y^3 \ln x$

***Solución:***

$$f_x = 2x \ln y + \frac{y^3}{x} \quad , \quad f_y = \frac{x^2}{y} + 3y^2 \ln x$$

17. $f(x,y) = \tan \dfrac{2x}{3y}$

***Solución:***

$$f_x = \sec^2\left(\frac{2x}{3y}\right) \cdot \frac{2}{3y}$$

$$f_y = \sec^2\left(\frac{2x}{3y}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} xy^{-2}\right)$$

18. $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} \ln \dfrac{x}{y}$

***Solución:***

$$f_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} + \ln \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_x = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{x} + \frac{1}{y} \ln \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}}$$

19. $f(r,s) = \sqrt{rs}\, e^{2+r}$

***Solución:***

$$f_r = \sqrt{rs}\, e^{2+r}(0+1) + e^{2+r} \frac{1}{2}(rs)^{-\frac{1}{2}}(s) = \sqrt{rs}\, e^{2+r} + \frac{s}{2}(rs)^{-\frac{1}{2}} e^{2+r}$$

$$f_s = \sqrt{rs}(0) + e^{2+r} \frac{1}{2}(rs)^{-\frac{1}{2}}(r) = \frac{re^{2+r}}{2\sqrt{rs}}$$

## <u>*Ejercicios 10.3*</u>

Encontrar la primera derivada parcial con respecto a cada una de las variables.

1. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 6$
2. $f(x,y) = 4x^2 + 3xy$
3. $f(x,y) = 2y + 1$
4. $f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y - 3xy + 4y$
5. $g(r,s) = (r+1)^2 + (s-3)^3 + 3rs^3 - 4$
6. $h(p,q) = \sqrt{pq}$
7. $z = sen(x,y) + \tan^3(xy)$
8. $f(x,y) = e^{sen(xy)} + e^{\cos(xy)} + \sqrt{3xy}$
9. $h(u,v) = \ln(u^2v + v^2u)$
10. $f(w,z) = \dfrac{\sqrt{w^2z^2 + 3}}{\sqrt[3]{w^3z^6}}$

## 10.4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PRIMERA DERIVADA PARCIAL

Las derivadas parciales de $f$ en un punto $P=(a,b)$, tienen una interpretación geométrica a saber. Sea $\Re^2$ el plano $xy$ en $\Re^3$. Por el punto $P=(a,b)$, pasa un plano $P_1$ paralelo al plano $xz$ ($P$ tiene como ecuación $y=b$). $C_1$ es la intersección de la gráfica de $f$ con el plano $P_1$; es decir, $C_1$ es la sección transversal de la gráfica de $f$ en $P_1$ (ver figura 10.9). Si $Q$ es el punto $(a,b,f(a,b))$ de la curva $C_1$, entonces $f_x(a,b)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva $C_1$ en el plano $P_1$ en el punto $Q$.

De manera semejante, se puede pasar un plano $P_2$ por el punto $P=(a,b)$ paralelamente al plano $yz$ y obtener una sección transversal $C_2$ de la gráfica de $f$ en $P_2$ en el punto $Q$ (ver figura 10.10).

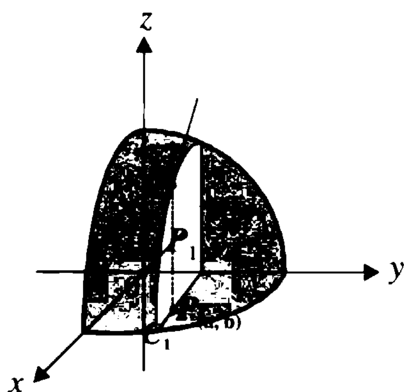



Figura 10.9

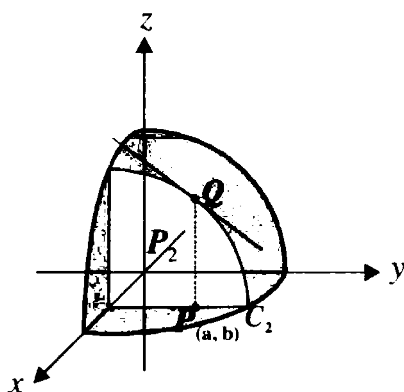



Figura 10.10

## 10.5 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

La derivada parcial de $z$ con respecto a $x$ denotada por:

$$f_x z \text{ o } \frac{\partial z}{\partial x}$$

donde, $z=f(x,y)$, puede derivarse con respecto a $x$ y a $y$, **dando lugar a las segundas derivadas parciales:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

también se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Si $z = f(x,y)$ y sus derivadas parciales son continuas, no importa el orden de derivación, esto es:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

denotado también por $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, estas últimas suelen denominarse **derivadas parciales mixtas**.

***Ejemplos 10.5***

20. $f(x,y) = x^2y^3 + x^4y^5 + x^3y^2 + 2xy$

***Solución:***

$$f_x(x,y) = 2xy^3 + 4x^3y^5 + 3x^2y^2 + 2y$$
$$f_{xx}(x,y) = 2y^3 + 12x^2y^5 + 6xy^2$$
$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 + 5x^4y^4 + 2x^3y + 2x$$
$$f_{yy}(x,y) = 6x^2y + 20x^4y^3 + 2x^3$$
$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3 + 4x^3y^5 + 3x^2y^2 + 2y\right)$$
$$= 6xy^2 + 20x^3y^4 + 6x^2y + 2$$

Este resultado es equivalente, si se cambia el orden al derivar; si la función es continua:

$$f_{yx}(x,y) = \left(f_y\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Entonces:

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + 5x^4y^4 + 2x^3y + 2x\right)$$
$$= 6xy^2 + 20x^3y^4 + 6x^2y + 2$$

Por lo tanto $f_{xy} = f_{yx}$.

21. $f(x,y)=xe^{y}-\cos\left(\frac{y}{x}\right)+4x^2y^2$

***Solución***: las cuatro segundas derivadas parciales son:

$$f_x(x,y)=e^y+sen\left(\frac{y}{x}\right)\left[-\left(\frac{y}{x^2}\right)\right]+8xy^2$$

$$f_{xx}(x,y)=sen\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{2y}{x^3}\right)-\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+8y^2$$

$$=\frac{2y}{x^3}sen\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\cos\frac{y}{x}+8y^2$$

$$f_{xy}(x,y)=(f_x)_y=e^y+sen\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)+16xy$$

$$=e^y-\frac{1}{x^2}sen\frac{y}{x}-\frac{y}{x^3}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+16xy$$

$$f_y(x,y)=xe^y+sen\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)+8x^2y$$

$$f_{yy}(x,y)=xe^y+\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)+8x^2$$

$$f_{yx}(x,y)=(f_y)_x=e^y+sen\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{-x^2}\right)+16xy$$

$$=e^y-\frac{1}{x^2}sen\frac{y}{x}-\frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}+16xy$$

22. $f(x,y)=(x^3+y^2)^5$

***Solución***: las cuatro segundas derivadas parciales son:

$$f_x(x,y)=15x^2(x^3+y^2)^4$$
$$f_{xx}(x,y)=180x^4(x^3+y^2)^3+30x(x^3+y^2)^4$$
$$f_{xy}(x,y)=120x^2y(x^3+y^2)^3$$
$$f_y(x,y)=10y(x^3+y^2)^4$$
$$f_{yy}(x,y)=80y^2(x^3+y^2)^3+10(x^3+y^2)^4$$
$$f_{yx}(x,y)=10y(4)(x^3+y^2)^3(3x^2)+(x^3+y^2)^4(0)$$
$$f_{yx}(x,y)=120x^2y(x^3+y^2)^3$$

23. $f(x,y)=4x^2y$

***Solución***:

$$f_x(x,y)=8xy \qquad f_y(x,y)=4x^2$$
$$f_{xx}(x,y)=8y \qquad f_{yy}(x,y)=0$$
$$f_{xy}(x,y)=8x \qquad f_{yx}(x,y)=8x$$

***Ejercicios 10.5***

Obtener las cuatro segundas derivadas parciales.

1. $f(x,y)=x^3y^5+x^4y^5+4xy$
2. $f(x,y)=7x^2+3y$
3. $f(x,y)=(x+y)^2xy$
4. $f(x,y)=\frac{x^6}{y^4}$
5. $f(x,y)=e^{xy}+e^{x^3y^2}$
6. $f(x,y)=e^{-x}seny$
7. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)+4$
8. $f(x,y)=\tan^{-1}xy$
9. $f(x,y)=x\ln\frac{y}{x}$
10. $f(x,y)=xseny-ysenx$

## 10.6 VALORES EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

En este apartado se analizarán los máximos y mínimos relativos de funciones de dos variables llamados también **Extremos Relativos.**

**Definición**

Se dice que una función $z=f(x,y)$ tiene un **máximo relativo** en $(a,b)$, o sea cuando $x=a$ y $y=b$ si para todos los puntos $(x,y)$ del plano que están suficientemente cercanos a $(a,b)$ se tiene:

$$f(a,b)\geq f(x,y)$$

Análogamente para tener un **mínimo relativo** se cumple que $f(a,b)\leq f(x,y)$.

Para determinar si la función $f(x,y)$ tiene un valor máximo o mínimo es necesario obtener primeramente los **PUNTOS CRITICOS**, igualando a cero las primeras derivadas. Esto es,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$$

O denotado de otra manera:

$$f_x(x,y)=0 \quad \text{y} \quad f_y(x,y)=0$$

Se puede utilizar la notación que se desee.

Por lo tanto, un punto $(a,b)$ para el cual $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ recibe el nombre de **punto crítico de** ***f***.

Esto quiere decir que para ubicar los extremos relativos de una función deben encontrarse los puntos críticos.

A continuación, se da un procedimiento llamado **"Criterio o Prueba de la Segunda Derivada"** para determinar si los puntos críticos son máximos o mínimos relativos.

**Teorema. Criterio de la segunda derivada parcial.**

Sea $z=f(x,y)$ con derivadas parciales continuas $f_{xx}$, $f_{yy}$ y $f_{xy}$ en todos los puntos $(x,y)$ cercanos al punto crítico $(a,b)$, y sea $H$ la función definida por:

$$H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2$$

Si se tiene que:

a) $H(a,b)>0$ y $f_{xx}(a,b)>0$, *f* tiene un mínimo relativo en $(a,b)$.

b) $H(a,b)>0$ y $f_{xx}(a,b)<0$, *f* tiene un máximo relativo en $(a,b)$.

c) $H(a,b)<0$, $f$ no tiene máximo ni mínimo relativo es un **PUNTO SILLA**.

d) $H(a,b)=0$, este criterio no da información, usar otro tipo de análisis.

Esto puede observarse en las figuras 10.11 y 10.12.

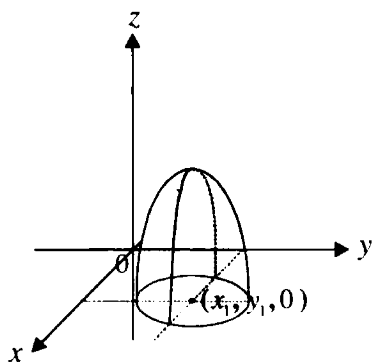



Figura 10.11. Máximo.

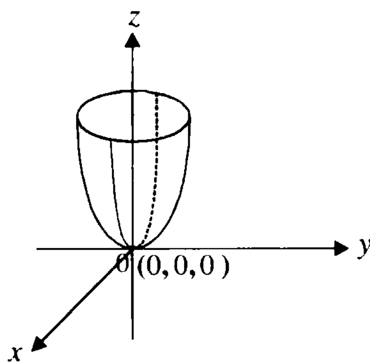



Figura 10.12. Mínimo.

*Ejemplos 10.6*

Dada la función $f(x,y)$ obtener los extremos relativos, si existen.

24. $f(x,y)=y^2-x^2$

***Solución***: Se obtienen las primeras derivadas parciales y se igualan a cero para obtener el punto o los puntos críticos.

$$f_x = -2x = 0 \qquad -2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$
$$f_y = 2y = 0 \;, \qquad 2y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$$

Por lo tanto el punto crítico es $P(0,0,z)$. Ahora se obtienen las segundas derivadas parciales:

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$$

Sustituyendo los valores encontrados en la fórmula, se tiene:

$$H = f_{xx}f_{yy} - \lfloor f_{xy} \rfloor^2 = (-2)(2) - (0) = -4 < 0$$

Por lo tanto, en $(0,0,z)$ no existe ni máximo ni mínimo, es un **punto silla**; también se puede representar de la siguiente manera.

En $P(0,0,z)$ existe un **punto silla**, como se muestra en la figura 10.13.

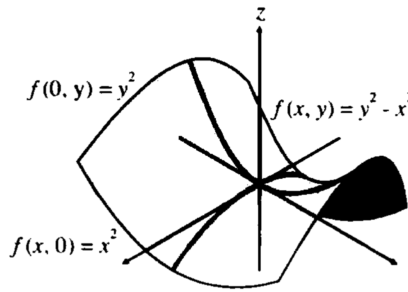



Figura 10.13

25. $z = f(x,y) = x^2 + 4y^2$

***Solución*:** Las primeras derivadas parciales son:

$$f_x = 2x \qquad f_y = 8y$$

igualando a cero para obtener el punto crítico:

$$2x = 0 \quad \text{entonces} \quad x = 0$$
$$8y = 0 \quad \text{entonces} \quad y = 0$$

de donde $P(0,0,z)$ es un punto crítico. Ahora:

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 8 \qquad f_{xy} = 0$$

Sustituyendo en $H = f_{xx}f_{yy} - \lfloor f_{xy} \rfloor^2$, se obtiene: $H = (2)(8) - (0)^2 = 16 > 0$, y como $f_{xx} > 0$, entonces existe un mínimo en $P(0,0,z)$.

26. $z = f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

***Solución*:**

$$f_x = y - \frac{2}{x^2} = 0 \qquad (1)$$

$$f_y = x - \frac{4}{y^2} = 0 \qquad (2)$$

de (1) $y = \frac{2}{x^2}$ y sustituyendo en (2), se tiene: $x - \frac{4}{4/x^4} = 0$, de donde $x - x^4 = 0$.

Factorizando: $x(1-x^3) = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Si $x = 0$ obtenemos una indetermina-ción y el punto no existe, y si $x = 1$, sustituyendo en (1) se obtiene el punto $P_2(1,2,z)$. Ahora se tiene:

$$f_{xx} = \frac{4}{x^3}\ ,\ f_{yy} = \frac{8}{y^3}\ ,\ \text{y}\ f_{xy} = 1$$

$$\therefore \qquad H(1,2) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{8}{8}\right) - (1)^2 = 3 > 0 \ \text{ y además } f_{xx}(1,2) = 4 > 0$$

Por lo tanto existe solamente un mínimo en $P(1,2,z)$.

27. $f(x,y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$

***Solución*:**

$$f_x = 8x^3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - x = 0 \qquad (1)$$

$$f_y = 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \qquad (2)$$

De (1): $x(4x^2 - 1) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. De donde se tiene:

$$P_1(0, y_1, z_1),\quad P_2\left(\frac{1}{2}, y_2, z_2\right) \quad \text{y} \quad P_3\left(-\frac{1}{2}, y_3, z_3\right)$$

Como $y = 0$, de (2), se tiene que

$$P_1(0,0,z_1),\ P_2\left(\frac{1}{2},0,z_2\right) \ \text{y} \ P_3\left(-\frac{1}{2},0,z_3\right)$$

que son los **puntos críticos**. Ahora:

$$f_{xx} = 24x^2 - 2 \qquad f_{yy} = 6 \qquad f_{xy} = 0$$

de donde:

a) $H(0,0) = (24(0)-2)(6)-(0)^2 = -12 < 0$
$\therefore$ se tiene un **punto silla** en $(0,0,z)$ o $\approx (0,0,0)$

b) $H\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(24\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\right)(6)-(0)^2 > 0$ y además $f_{xx}\left(\frac{1}{2},0\right) > 0$

$\therefore$ se tiene un **mínimo** en $\left(\frac{1}{2},0,z\right)$

c) $H\left(-\frac{1}{2},0\right) = \left(24\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\right)(6)-(0)^2 > 0$ y además $f_{xx}\left(-\frac{1}{2},0\right) > 0$

$\therefore$ se tiene un **mínimo** en $\left(-\frac{1}{2},0,z\right)$

28. Dada la función $f(x,y) = 3x^3 + 9xy^2 - 9x^2 - 9y^2 + 12$, obtener, si es posible, los máximos, los mínimos y los puntos silla (si existen).

***Solución***: Para obtener los puntos críticos obtenemos sus primeras derivadas y las igualamos a cero:

$$f_x = 9x^2 + 9y^2 - 18x = 0 \qquad (1)$$
$$f_y = 18xy - 18y = 0 \qquad (2)$$

de (2), se tiene:

$$18y(x-1) = 0 \quad , \quad y = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad , \quad x = 1$$

Sustituyendo por separado estos valores en (1): Si $y = 0$:

$$9x^2 + 9y^2 - 18x = 0 \quad , \quad 9x^2 - 18x = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$\therefore$ tenemos dos puntos críticos: $P_1(0,0,z_1)$ y $P_2(2,0,z_2)$. Ahora si $x = 1$:

$$9x^2 + 9y^2 - 18x = 0 \quad , \quad 9(1)^2 + 9y^2 - 18(1) = 0$$
$$9y^2 = 9 \quad , \quad y = \pm 1$$
$$P_3(1,1,z_3) \quad \text{y} \quad P_4(1,-1,z_4)$$

Obtenemos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = 18x - 18 \quad , \quad f_{yy} = 18x - 18 \quad , \quad f_{xy} = 18y$$

Para obtener los máximos, mínimos o puntos silla, se aplica en cada punto:

$$H = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 \quad _p$$

En $P_1(0,0,z_1)$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 \qquad\qquad f_{xx}$$

$$[18(0)-18][18(0)-18]-[18(0)]^2 \qquad\qquad 18(0)-18<0$$

$$324>0$$

por lo tanto,en $P_1(0,0,z_1)$ hay un máximo.

En $P_2(2,0,z_2)$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 \qquad\qquad f_{xx}$$

$$[18(0)-18][18(2)-18]-[18(0)]^2 > 0 \qquad\qquad [18(2)-18]>0$$

$$324>0 \qquad\qquad 18>0$$

por lo tanto,en $P_2(2,0,z_2)$ hay un mínimo.

En $P_3(1,1,z_3)$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$[18(1)-18]-[18(1)-18]-[18(1)]^2$$

$$-324<0$$

por lo tanto, en $P_3(1,1,z_3)$ hay un punto silla.

En $P_4(1,-1,z_4)$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$[18(1)-18]-[18(1)-18]-[18(-1)]^2$$

$$-324<0$$

por lo tanto, en $P_4(1,-1,z_4)$ hay un punto silla.

***Ejercicios 10.6***

Dadas las funciones siguientes, obtener:

a) Puntos críticos
b) Máximos, mínimos y puntos sillas (si es que existen)

1. $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$
2. $f(x,y)=x^2+3y^2+4x-9y+3$
3. $f(s,t)=st-\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$
4. $f(x,y)=2x^2+y^2-2x+y$
5. $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4$
6. $f(x,y)=2x^2y+2y^2+16x$
7. $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$
8. $f(x,y)=2xy$
9. $f(x,y)=-x^2-y^2+xy+6x$
10. $f(x,y)=3x^3-9xy+3y^3$

# SOLUCIÓN A EJERCICIOS PARES

## Capítulo I

***1.1***

**2.** $\{x^3, x^5, x^7, x^9, x^{11}\}$. **4.** $\{sen\ \pi, sen\ 2\pi, sen\ 3\pi, sen\ 4\pi, sen\ 5\pi\}$.

**6.** $\{1^1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5\}$. **8.** $\left\{\frac{1}{2!}, \frac{2}{3!}, \frac{3}{4!}, \frac{4}{5!}, \frac{5}{6!}\right\}$. **10.** $\left\{\frac{\ln(2)}{1}, \frac{\ln(3)}{2}, \frac{\ln(4)}{3}, \frac{\ln(5)}{4}, \frac{\ln(6)}{5}\right\}$

***1.2***

**2.** Converge. **4.** Converge. **6.** Converge. **8.** Diverge. **10.** Converge. **12.** Diverge

***1.3***

**2.** monótona creciente. **4.** monótona decreciente. **6.** no es monótona. **8.** no es monótona. **10.** monótona decreciente.

***1.4***

**2.** no es acotada. **4.** $0 \le a_n \le 2$ acotada. **6.** $0 \le a_n \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ acotada.

**8.** $-1 \le a_n \le 1$ acotada. **10.** acotada

***1.5***

**2.** 0. **4.** -∞. **6.** 1. **8.** 1. **10.** 0

## Capítulo II

***2.1***

**2.** $1+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81},\ 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}$.

**4.** $\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{10},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{29},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{29}+\frac{1}{66}$

**6.** $4,\ 4+13,\ 4+13+34,\ 4+13+34+73$

**8.** $\frac{e^2}{\ln 2},\ \frac{e^2}{\ln 2}+\frac{e^3}{\ln 3},\ \frac{e^2}{\ln 2}+\frac{e^3}{\ln 3}+\frac{e^4}{\ln 4},\ \frac{e^2}{\ln 2}+\frac{e^3}{\ln 3}+\frac{e^4}{\ln 4}+\frac{e^5}{\ln 5}$

**10.** $-\frac{1}{e^2},\ -\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3},\ -\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e^4},\ -\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^5}$

***2.2***

**2.** $\frac{19}{3}$. **4.** 847

***2.3***

**2.** **a)** 38.5, **b)** 390. **4.** **a)** 100/4, **b)** $\frac{1275}{2}$

***2.5***
**2.** Converge. **4.** Diverge
***2.6.1***
**2.** Converge. **4.** Converge. **6.** Converge. **8.** no decide. **10.** Converge.
***2.6.2***
**2.** Diverge. **4.** Diverge. **6.** Diverge. **8.** no decide. **10.** Diverge.
***2.6.3***
**2.** Converge. **4.** Diverge. **6.** Converge
***2.7.1***
**2.** Converge. **4.** Converge. **6.** Diverge. **8.** Converge. **10.** Converge
***2.8***
**2.** Converge ABS. **4.** Converge
***2.9***
**2.** Converge. **4.** Diverge. **6.** no decide. **8.** Converge. **10.** no decide
***2.10***
**2.** Diverge. **4.** Converge. **6.** no decide

## Capítulo III
***3.1***
**2.** I.C. = (-1,1), R.C. = 1. **4.** I.C. = [-1,1], R.C. = 1. **6.** I.C. = [-1,1), R.C. = 1.
**8.** I.C. = [-1,2), R.C. = 1.5
***3.2***
**2.** $\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$, I.C. = (-1,1), R.C. = 1. **4.** $e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$, I.C. $=\Re$, R.C. $=+\infty$
**6.** $\frac{x^2}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+2}$, I.C. = (-1,1), R.C. = 1. **8.** $f(x)$: I..C. = (-1,1), R.C. = 1; $f'(x)$: I..C. = (-1,1), R.C. = 1. **10.** $f(x)$: I..C. = (-2,2), R.C. = 2; $f'(x)$: I..C. = (-2,2), R.C. = 2
***3.3***
**2.** $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}$. **4.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{en!}$. **6.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}\left(x-\pi/4\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$. **8.** 1.

## Capítulo IV
***4.1***
**2.** $f(x)=-7x^2+5x-2$. **4.** $f(x)=-2\,senx+3\cos x$. **6.** $f(x)=e^{3x}(3x+1)-\frac{5}{x}$
***4.2***
**2.** $-\frac{1}{5x^5}+c$. **4.** $3\sqrt[3]{x}+c$. **6.** $\frac{\sqrt{4x+1}}{2}+c$. **8.** $\frac{2(x+40)^{5/2}}{5}+c$. **10.** $\frac{(2x^2+4)^2}{8}+c$.
**12.** $\frac{4(5x+2)^{3/4}}{15}+c$. **14.** $\frac{x}{2}(x-2)+c$. **16.** $\frac{x^6}{6}+x^5+x^2+10x+c$. **18.** $\frac{\sqrt{6x^2+4}}{6}+c$.

## Capítulo X

### *10.1*

**2. a)** 0.428, **b)** $\sqrt{\dfrac{r^2+5}{r^2-5}}$, **c)** $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y^2}{x-y^2}}$.

**4. a)** Dominio = $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 4\}$, **b)** Dominio = $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2\}$,
**c)** Dominio = $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 2\}$, **d)** Dominio = $\{(x,y) \mid -1 \leq x-y \leq 1\}$,
**e)** Dominio = $\{(x,y) \mid x \geq 0 \text{ y } y \geq 0\}$.

### *10.2*

**2.** 10. **4.** 3. **6.** 19.

### *10.3*

**2.** $f_x = 8x+3y$, $f_y = 3x$. **4.** $f_x = 3x^2y^2+4xy-3y$, $f_y = 2x^3y+2x^2-3x+4$.

**6.** $h_p = \dfrac{q}{2\sqrt{pq}}$, $h_q = \dfrac{p}{2\sqrt{pq}}$. **8.** $f_x = ye^{sen(xy)}\cos(xy) - ye^{\cos(xy)}sen(xy) + \dfrac{3y}{2\sqrt{3x}}$,

$f_y = xe^{sen(xy)}\cos(xy) - x\ sen(xy)e^{\cos(xy)} + \sqrt{3x}$.

### *10.5*

**2.** $f_{xx} = 14$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = 0$, $f_{yx} = 0$. **4.** , $f_{xx} = 30\dfrac{x^4}{y^4}$, $f_{yy} = 20x^6y^{-6}$,

$f_{xy} = -24\dfrac{x^5}{y^5}$, $f_{yx} = -24x^5y^{-5}$. **6.** $f_{xx} = e^{-x}sen\ y$, $f_{yy} = -e^{-x}sen\ y$,

$f_{xy} = -e^{-x}\cos y$, $f_{yx} = -e^{-x}\cos y$. **8.** $f_{xx} = \dfrac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$, $f_{yy} = -\dfrac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$,

$f_{xy} = \dfrac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$. **10.** $f_{xx} = -\cos x$, $f_{yy} = -x\ sen\ y$, $f_{xy} = \cos y - \cos x$

### *10.6*

**2.** mínimo en $\left(-2, \dfrac{3}{2}, z\right)$. **4.** mínimo en $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, z\right)$. **6.** punto silla en $(2,-2,z)$.

**8.** punto silla en $(0,0,z)$. **10.** punto silla en $(0,0,z)$, mínimo en $(1,1,z)$

# ÍNDICE

# BIBLIOGRAFÍA

AYRES, FRANK Jr., *Cálculo (serie Schums)*, Mc Graw Hill, México, 2000.

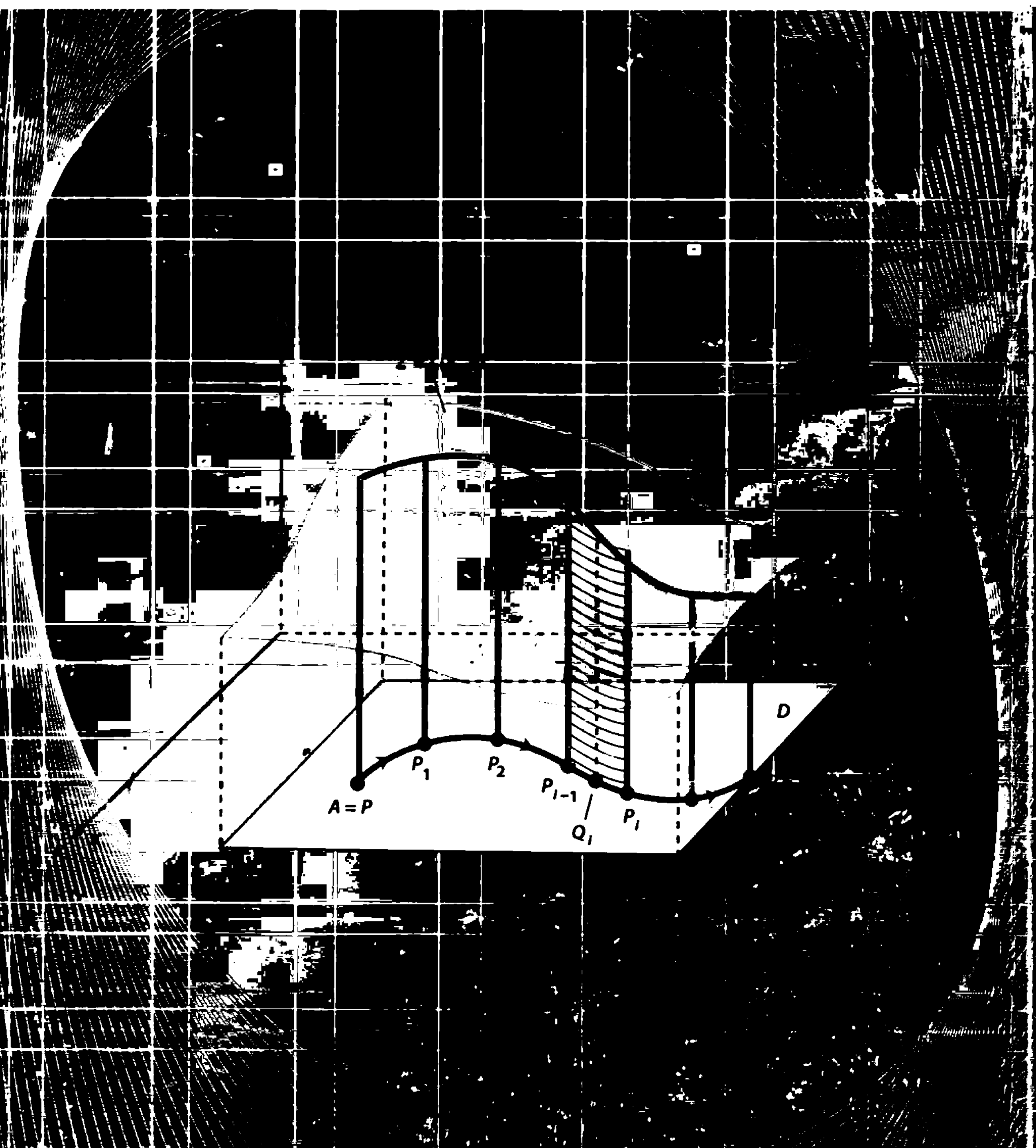
D'PRIMA, BOYCE, *Cálculo,* CECSA, México, 1994.

STEWART, JAMES, *Cálculo,* International Thomson Editores, México, 1998.

SWOKOWSKI, EARL, *Cálculo con Geometría Analítica*, Iberoamericana, México, 1989.

THOMAS-FINNEY, *Cálculo de una Variable*, Addison Wesley, México, 1998.

T. SMITH, ROBERT, *Cálculo*, Mc Graw Hill, México, 2002.



D
A = P
P1
P2
Pi-1
Qi
Pi